

Госкомсвязи России

САНКТ- ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА

Л.Н. Щелованов, Г.С. Антонова, Е.М. Доронин

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

220400, 220200, 200900

Учебное пособие

Санкт-Петербург

1997

УДК 621.396

Щелованов Л.Н., Антонова Г.С., Доронин Е.М. Основы теории автоматического управления. 220400, 220200, 200900: Учеб. пособие / СПбГУТ. - СПб., 1997.

Рассмотрены основы непрерывных и дискретных одномерных и многомерных систем автоматического управления. Раскрыты особенности нелинейных и оптимальных САУ. Особое внимание уделено анализу и синтезу САУ на основе методов цифрового моделирования.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 220400, 220200, 200900. Может быть рекомендовано для углубленного изучения теории автоматического управления, используемой при создании современных систем и сетей связи, а также при курсовом и дипломном проектировании.

Ответственный редактор *Л.Н. Щелованов*

Рецензенты: *В.В.Таран, Г.Б. Ходасевич*

© Издание Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А.Бонч-Бруевича, 1997
Редактор *Л.А.Медведева*

Подписано к печати 30.12.97. ЛР № 020475 от 29.04.97.

Объем 5 печ. л. Тираж 300 экз. Зак. 122

Тип. СПбГУТ. 191186, СПб, наб. р. Мойки, 61

ВВЕДЕНИЕ

Современные системы связи немыслимы без их автоматизации, причем применение автоматических устройств самое различное - от простейших автоматов, используемых в отдельных узлах аппаратуры связи, до автоматизированных комплексов связи. Вот почему для анализа и синтеза систем связи, глубокого понимания принципов их построения и функционирования необходимо изучение и использование теории систем управления.

Различают автоматические (САУ) и автоматизированные системы управления (АСУ). В САУ человек непосредственного участия в процессе управления не принимает. В АСУ предполагается непосредственное участие людей в процессах управления. Отличие АСУ от традиционной системы управления заключается в том, что часть управленческих работ (сбор, анализ и преобразование информации) выполняется с помощью ЭВМ.

В настоящем пособии рассмотрены основы теории САУ.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основой управления является получение и обработка информации о состоянии объекта и внешних условиях его работы для определения воздействий на объект, обеспечивающих достижение цели управления.

Управление, осуществляемое без участия человека в динамике работы объекта, называется автоматическим управлением. Совокупность объекта управления и управляющего устройства образует систему автоматического управления (САУ). Наиболее совершенными являются оптимальные системы автоматического управления. Создание этих систем связано с развитием теории оптимального управления. Несмотря на сравнительную молодость этой теории, она достигла такого уровня, что с ее помощью успешно решаются сложные задачи оптимального управления, в том числе и управления динамическими системами связи.

Следует указать, что теория оптимального управления развивалась на базе теории автоматического управления. Поэтому для более глубокого понимания особенностей функционирования динамических систем связи, являющихся оптимальными системами управления, рассмотрим предварительно основные положения теории автоматического управления (регулирования) [1].

Структурная схема САУ (рис.1.1а) содержит объект управления O и управляющее устройство $УУ$. Состояние объекта характеризуется вектором Y , компонентами которого являются отдельные выходные величины. От управляющего устройства на вход объекта поступает управляющее воздействие (управление) U . К объекту приложено также возмущающее воздействие (возмущение, помеха) F , которое изменяет состояние объекта, т.е. Y , препятствуя или способствуя управлению. На вход управляющего устройства подается задающее воздействие (задание) G , содержащее информацию о требуемом значении Y , т.е. цели управления. Переменные U , G и F в общем случае являются векторами, как и Y . Как показано на рис.1.1а, в самом общем случае на вход управляющего устройства, помимо задающего воздействия G , поступает также информация о текущем состоянии объекта Y и о воздействующем на объект возмущении F . Управляющее устройство перерабатывает получаемую информацию по определенному алгоритму. В результате на его выходе возникает управляющее воздействие.

На рис.1.1б изображена функциональная схема САУ, на которой показаны составные части управляющего устройства: устройство измерения УИ, вычислительное устройство ВУ и исполнительное устройство ИУ.

УИ служит для измерения переменных Y , G , F . ВУ реализует алгоритм работы управляющего устройства. ИУ предназначено для непосредственного управления объектом, т.е. изменения его состояния в соответствии с сигналом, выдаваемым вычислительным устройством.

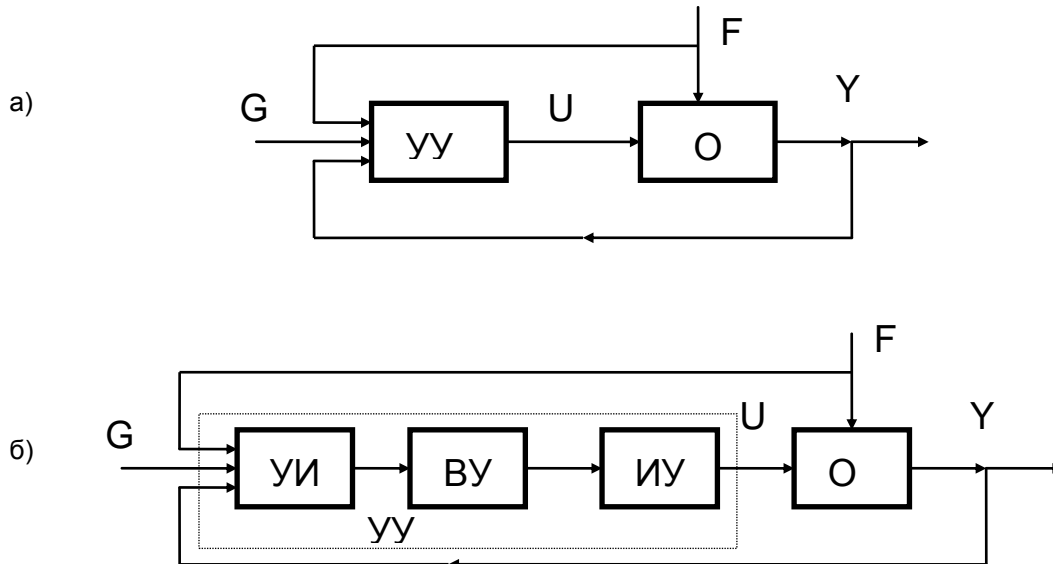


Рис.1.1

САУ могут быть разомкнутые и замкнутые. В разомкнутых САУ выходная величина объекта Y не измеряется (отсутствует обратная связь). В замкнутых САУ на вход управляющего устройства подается задающее воздействие G и выходная величина объекта Y . В таких САУ управляющее устройство стремится ликвидировать все отклонения Y от его значения, определяемого заданием G , независимо от причин, вызвавших эти отклонения, включая любые возмущения, внешние и внутренние помехи, а также изменения параметров системы.

В зависимости от характера задающего воздействия САУ делятся на три вида систем: стабилизации, программного управления и следящие.

САУ бывают непрерывного и дискретного действия, линейные и нелинейные. Непрерывная система состоит только из звеньев непрерывного действия, т.е. звеньев, выходная величина которых изменяется плавно при плавном изменении входной величины. Дискретная система содержит звенья дискретного действия (импульсные, релейные).

Большой класс систем автоматического управления составляют адаптивные системы, к которым относятся и адаптивные линии связи.

В зависимости от количества входных и выходных координат САУ делятся на многомерные и одномерные.

В многомерных САУ входная и выходная переменные являются векторами. Многомерная система может иметь много входов и выходов, а также возможен случай, когда у системы один вход и один выход, но несколько входных и выходных переменных.

Одномерные САУ имеют один вход и один выход. К ним относится большое количество различных систем управления и регулирования, используемых в различных областях техники, в том числе и в технике связи.

Теория САУ наиболее полно разработана для одномерных систем автоматического управления, причем основные понятия и общие соотношения, полученные для одномерных САУ, используются в теории многомерных систем. Поэтому рассмотрению многомерных САУ должно предшествовать изучение основных положений теории одномерных систем.

С широким внедрением ЭВМ для исследования различных систем появились новые методы анализа систем автоматического управления. Весьма эффективно может быть применен метод цифрового моделирования, основанный на использовании разностных рекурсивных уравнений.

Метод цифрового моделирования относится к алгоритмическим методам, так как входные и выходные функции звена (системы) задаются либо представляются алгоритмически. Алгоритмическое задание функции противопоставляется аналитическому, когда все зависимости определены явно соответствующими формулами.

Для получения цифровой модели аналогового звена целесообразен переход от непрерывной системы к эквивалентной импульсной системе, а для этого используются математические методы дискретных преобразований (D-преобразование или Z-преобразование). В этом случае удастся получить цифровую модель в виде рекурсивного уравнения, связывающего между собой входную переменную общего вида с выходной переменной звена с учетом его структуры и первичных параметров схемы. Указанный метод может быть реализован при наличии соотношений для перехода от обычного преобразования Лапласа (L-преобразования) к Z-преобразованию.

В отличие от линейных САУ нелинейные системы наряду с линейными содержат нелинейные звенья. В общем случае нелинейные САУ описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что значительно усложняет их исследование. Во многих случаях удастся упростить задачу анализа нелинейной САУ, применив метод цифрового моделирования. Так, если в системе имеется безынерционное нелинейное звено и оно находится между инерционными линейными звеньями, причем между звеньями имеется развязка, то расчет процесса на выходе безынерционного нелинейного звена следует производить используя амплитудную характеристику нелинейного звена, которая может быть задана аналитически или графически. Если нелинейное звено инерционное, то производится кусочно-линейная аппроксимация нелинейной характеристики нелинейного элемента. Для каждого линейного участка выходной процесс рассчитывается по рекурсивным уравнениям, а при переходе на следующий участок учитываются ненулевые начальные условия на границе перехода с одного линейного участка на другой.

В настоящее время разработка нового поколения САУ идет в направлении создания оптимальных САУ. Оптимальные САУ обладают наилучшими в определенном смысле характеристиками. Для их исследования используется теория оптимизации и оптимального управления.

За счет оптимального построения системы обеспечиваются более высокие качественные показатели системы и достигается значительный экономический эффект.

В системах автоматического управления наиболее полно реализуются принципы оптимального управления, то есть достижение экстремального значения функции качества за счет изменения управляющих воздействий и параметров САУ.

2. ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Основные характеристики звеньев САУ

Систему автоматического управления можно представить в виде соединения звеньев. Для анализа работы САУ необходимо иметь зависимости, связывающие входные и выходные сигналы звеньев. Эти зависимости определяются с помощью дифференциальных уравнений.

Рассмотрим простейший случай линейного звена непрерывного действия, у которого все процессы описываются с помощью линейных дифференциальных уравнений. Связь между выходной (Y) и входной (X) величинами линейного звена или линейной системы выражается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами :

$$b_m \frac{d^m y}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 y = a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x. \quad (2.1)$$

Для описания свойств звеньев более удобно пользоваться не непосредственно дифференциальными уравнениями, а следующими коэффициентами или функциями, вытекающими из уравнения (2.1) и также полностью определяющими связь между входной и выходной величинами звеньев:

- передаточной функцией;
- переходной характеристикой (функцией);
- комплексным коэффициентом передачи (ККП).

Для определения передаточной и переходной функций звена наиболее целесообразно использовать преобразование Лапласа, которое основано на двух следующих формулах:

- прямого преобразования Лапласа

$$L[x(t)] = X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt; \quad (2.2)$$

- обратного преобразования Лапласа

$$L^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} X(p) \cdot e^{pt} dp. \quad (2.3)$$

Здесь L и L^{-1} - обозначения прямого и обратного преобразования Лапласа.

Преобразованная по Лапласу величина называется изображением и обозначается через $X(p)$ и $Y(p)$ соответственно для входной и выходной величин.

Под « p » подразумевается комплексная частота $p = \sigma + j\omega$. Если $p = j\omega$ ($\sigma = 0$), преобразование Лапласа превращается в его частный случай - преобразование Фурье.

В справочниках по математике имеются таблицы преобразования Лапласа для различных функций, встречающихся в практических задачах. Основные формулы из этих таблиц приведены в прил. 1.

Передаточной функцией линейного звена $W(p)$ называется отношение изображения выходной величины $Y(p)$ к изображению входной величины $X(p)$ при нулевых начальных условиях, т.е. при отсутствии запаса энергии в звене :

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (2.4)$$

Рассматривая линейное дифференциальное уравнение (2.1) и находя изображение для левой и правой частей уравнения, получаем

$$b_m p^m Y(p) + b_{m-1} p^{m-1} Y(p) + \dots + b_0 Y(p) = a_n p^n X(p) + a_{n-1} p^{n-1} X(p) + \dots + a_0 X(p). \quad (2.5)$$

Отсюда

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}. \quad (2.6)$$

Переходная или временная характеристика (функция) звена $h(t)$ представляет собой реакцию на выходе звена, вызванную подачей на его вход единичного ступенчатого воздействия

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Изображение этой функции (прил.1)

$$X(p) = \frac{1}{p}.$$

Поэтому в соответствии с (2.4) получаем

$$H(p) = Y(p) = X(p) \cdot W(p) = W(p) / p. \quad (2.7)$$

Переходя от изображения к оригиналу, определяем выражение для переходной характеристики

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right]. \quad (2.8)$$

Это выражение подчеркивает наличие однозначной связи между переходной и передаточной функциями.

Переход от передаточной функции к комплексному коэффициенту передачи (ККП) осуществляется заменой p на $j\omega$ в выражении передаточной функции.

Под ККП звена $W(j\omega)$ понимается отношение комплексной амплитуды выходного сигнала к комплексной амплитуде входного сигнала:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{A_{\text{ВЫХ}} \cdot e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}}}{A_{\text{ВХ}} \cdot e^{j\varphi_{\text{ВХ}}}} = \\ &= \frac{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0} = W(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где модуль ККП равен отношению амплитуд выходного и входного сигналов для данного значения частоты (амплитудно-частотная характеристика)

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{A_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{A_{\text{ВХ}}(\omega)}; \quad (2.10)$$

аргумент ККП равен разности фаз этих же сигналов (фазочастотная характеристика)

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega). \quad (2.11)$$

Комплексный коэффициент передачи может быть представлен в виде суммы действительной (Re) и мнимой (Jm) составляющих:

$$W(j\omega) = \text{Re}W(j\omega) + \text{Jm}W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (2.12)$$

Имея ККП, можно построить амплитудно-фазовую характеристику звена. Для этого в выражениях (2.9) или (2.12) следует изменять частоту от нуля до

бесконечности и построить на комплексной плоскости годограф вектора ККП (рис.2.1), называемый амплитудно-фазовой характеристикой.

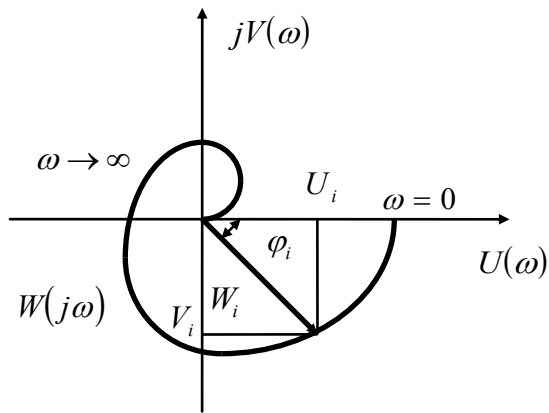


Рис.2.1

Между $W(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega)$ и $V(\omega)$ существует связь (рис.2.1):

$$W(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (2.13)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad (2.14)$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (2.15)$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (2.16)$$

2.2. Типовые звенья САУ

Используя приведенные выше характеристики, можно на основании идентичности передаточных функций или ККП реальных звеньев все их многообразие свести к ограниченному числу звеньев, которые назовем типовыми.

В качестве типовых звеньев САУ выбраны наиболее простые звенья, в которых процессы описываются дифференциальными уравнениями не выше 2-го порядка. При этом замену реального звена типовым осуществляют так: если передаточные функции реального и типового звеньев совпадают, то они являются взаимозаменяемыми; более сложные реальные звенья заменяются, если возможно, последовательным или параллельным соединением типовых звеньев.

Рассмотрим типовые звенья, которые описываются дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x, \quad (2.17)$$

$$b_1 p Y(p) + b_0 Y(p) = a_1 p X(p) + a_0 X(p)$$

и соответствующей передаточной функцией

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p}. \quad (2.18)$$

Для различных типовых звеньев коэффициенты передаточной функции a_0 , a_1 , b_0 , b_1 принимают различные, в том числе и нулевые значения.

Различают следующие 4 типовых звена:

безынерционное (усилительное) $W(p) = \frac{a_0}{b_0}$; $a_1 = b_1 = 0$;

инерционное (апериодическое) $W(p) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p}$; $a_1 = 0$;

интегрирующее $W(p) = \frac{a_0}{b_1 p}$; $a_1 = b_0 = 0$;

дифференцирующее $W(p) = \frac{a_1 p}{b_0}$; $a_0 = b_1 = 0$. (2.19)

Из числа более сложных звеньев, описываемых дифференциальными уравнениями 2-го порядка, в качестве типового берется только одно, отвечающее случаю $a_2 = a_1 = 0$. В соответствии с этим из передаточной функции

$$W(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} \tag{2.20}$$

получаем

$$W(p) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}. \tag{2.21}$$

Такое звено называется колебательным.

Примеры некоторых звеньев, их частотные и переходные характеристики приведены в прил.2.

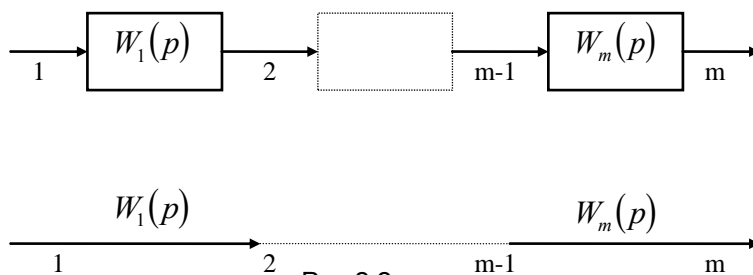
2.3. Уравнение разомкнутой и замкнутой САУ

Процессы в линейной системе описываются линейными дифференциальными уравнениями (2.1). Левая часть уравнения характеризует саму систему, так как в нее входит $y(t)$ - регулируемая (управляемая) величина или отклонение регулируемой величины от заданного значения, а правая часть определяется возмущением $x(t)$.

Для анализа системы используют ее передаточную функцию, полученную по передаточным функциям звеньев. Отдельные звенья САУ должны обладать свойством направленности, т.е. каждое последующее звено не должно влиять на выходную величину предыдущего звена.

Наряду со структурной схемой САУ используют граф системы управления. Ветви графа соответствуют передаточным функциям элементов, а узлы графа - соединениям (связям элементов).

Рассмотрим основные правила, позволяющие определять передаточные



функции системы в целом по передаточным функциям отдельных элементов. Эти правила составляют алгебру передаточных функций. Приведем графы, соответствующие различным соединениям элементов (звеньев) САУ.

Передаточная функция последовательного соединения звеньев (рис.2.2) равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \prod_{i=1}^m W_i(p). \quad (2.22)$$

При параллельном соединении звеньев (рис.2.3) на все входы поступает один и тот же входной сигнал, а выходные сигналы всех звеньев алгебраически суммируются:

$$y(t) = \sum_{i=1}^m y_i(t). \quad (2.23)$$

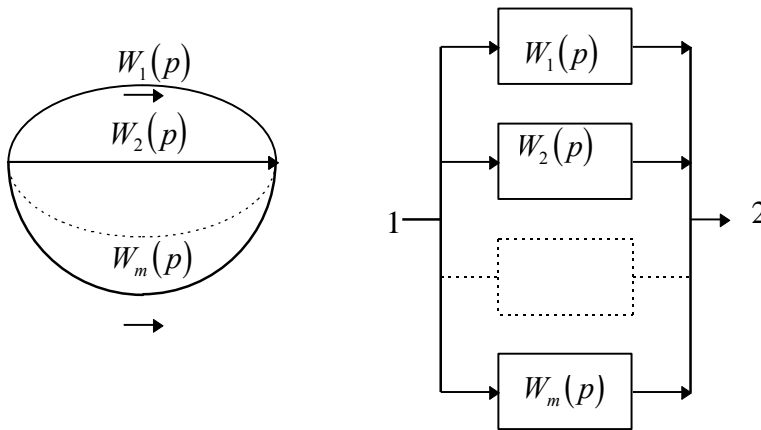


Рис.2.3

Переходя к изображениям, получаем:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=1}^m W_i(p)X(p)}{X(p)},$$

откуда

$$W(p) = \sum_{i=1}^m W_i(p). \quad (2.24)$$

Следовательно, передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

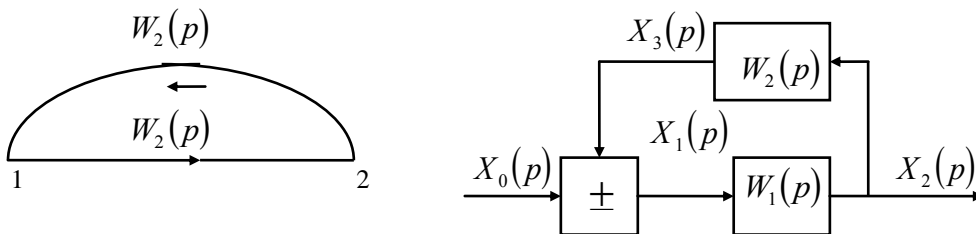


Рис.2.4

Существует также обратное соединение звеньев (рис.2.4). В этом случае имеем

$$X_2(p) = W_1(p)X_1(p), \quad (2.25)$$

$$X_3(p) = W_2(p)X_2(p), \quad (2.26)$$

$$X_1(p) = X_0(p) \pm X_3(p). \quad (2.27)$$

Знак «минус» в (2.27) соответствует отрицательной обратной связи, а знак «плюс» - положительной обратной связи.

Подставляя в (2.26) выражение (2.25) для $X_2(p)$, получаем

$$X_3(p) = W_1(p)W_2(p)X_1(p). \tag{2.28}$$

Заменяя $X_3(p)$ в (2.27) его значением из (2.28), получаем

$$X_1(p) = \frac{1}{1 \mp W_1(p)W_2(p)} X_0(p). \tag{2.29}$$

Подставляя это значение в (2.25), находим

$$X_2(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)} X_0(p) = W_{oc}(p)X_0(p). \tag{2.30}$$

Отсюда

$$W_{oc}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}. \tag{2.31}$$

При преобразовании сложных графов к простейшему виду во многих случаях приходится производить перенос точки съема.

Если точка съема переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками съема (рис.2.5).

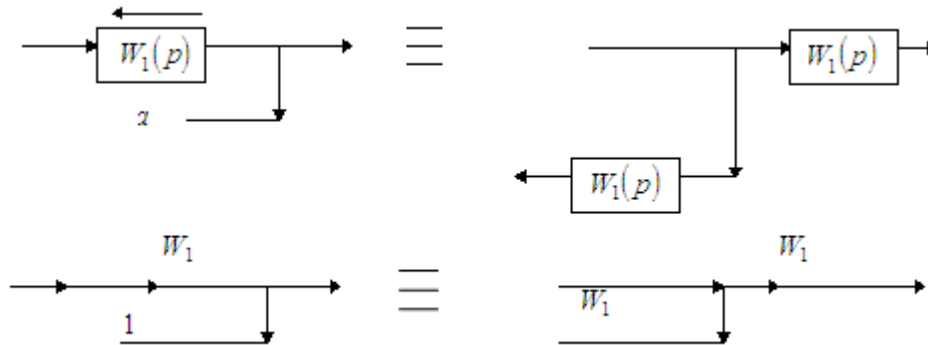


Рис.2.5

Если точка съема переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с обратными передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между новой и прежней точками съема (рис.2.6).

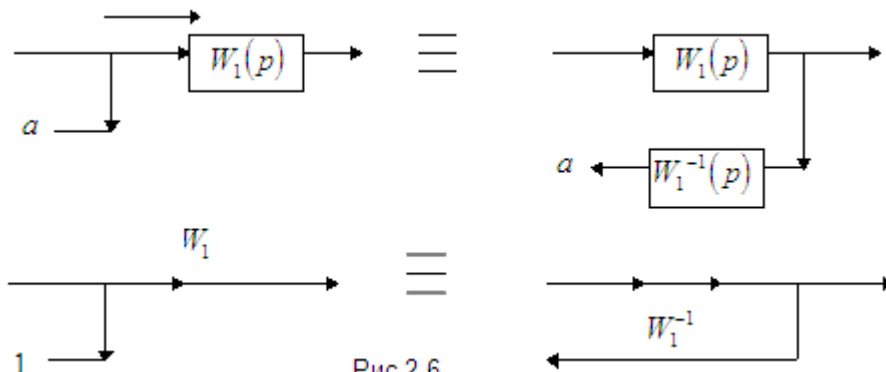


Рис.2.6

Также приходится переносить точку суммирования. Если точка суммирования переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками суммирования (рис.2.7).

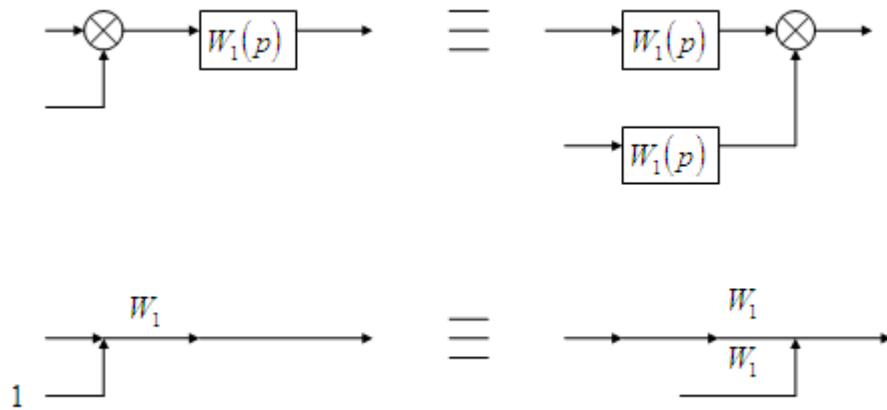


Рис.2.7

2.3.1. Передаточная функция замкнутой системы

Передаточную функцию замкнутой системы можно найти по передаточной функции разомкнутой системы. Так, если в замкнутой цепи обратной связи включено звено с передаточной функцией $W(p)$, то на входе системы происходит суммирование входного сигнала с сигналом обратной связи (рис.2.8а).

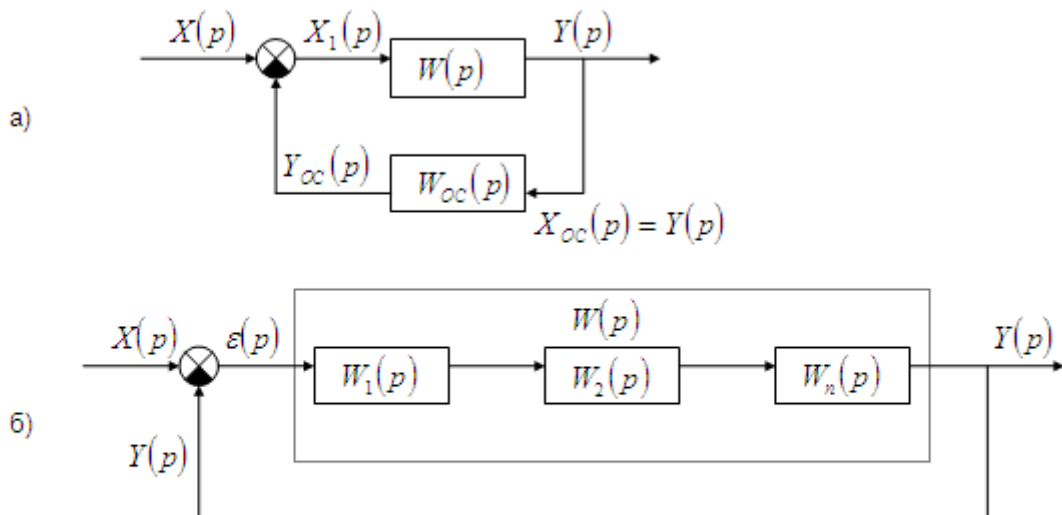


Рис.2.8

Связь между изображением входной и выходной величины цепей прямой и обратной связи при отрицательной обратной связи, характеризуется следующими уравнениями:

- для прямой связи

$$Y(p) = W(p)X_1(p) = W(p)[X(p) - Y_{oc}(p)], \quad (2.32)$$

где $W(p)$ - передаточная функция прямой цепи;

- для обратной связи

$$Y_{oc}(p) = W_{oc}(p)X_{oc}(p) = W_{oc}(p)Y(p), \quad (2.33)$$

где $W_{oc}(p)$ - передаточная функция цепи обратной связи.

Если в уравнение (2.32) подставить значение $Y_{oc}(p)$ из (2.33), то получим

$$Y(p) = W(p)[X(p) - W_{oc}(p)Y(p)]$$

или

$$Y(p)[1 + W(p)W_{oc}(p)] = W(p)X(p),$$

откуда можно получить выражение для передаточной функции замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p) \cdot W_{oc}(p)}. \quad (2.34)$$

Частным случаем является замкнутая система (рис.2.8), не содержащая звеньев в цепи обратной связи. В этом случае цепь обратной связи имеет передаточную функцию, равную единице, и тогда, используя уравнение (2.34), находим

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (2.35)$$

Определив передаточную функцию замкнутой системы, этим самым найдем в операторной форме ее дифференциальное уравнение

$$Y(p) = X(p) \cdot \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (2.36)$$

Представляет интерес уравнение замыкания, связывающее величину отклонения (ошибки) замкнутой системы со значением входной величины (рис.2.8б):

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t). \quad (2.37)$$

Переходя к изображениям и вводя передаточную функцию замкнутой системы, получаем

$$\varepsilon(p) = X(p) - Y(p) = X(p)[1 - W_3(p)]. \quad (2.38)$$

После подстановки в (2.38) значения передаточной функции замкнутой системы

$$\varepsilon(p) = X(p) \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (2.39)$$

Последнее выражение может быть использовано для определения ошибок в САУ при заданных внешних воздействиях.

2.4. Методы перехода от изображения к оригиналу

Для исследования качества процесса управления необходимо решать дифференциальные уравнения. В теории САУ применяются наиболее эффективные методы, а именно для описания линейного звена используется уравнение вида «вход-выход» через операторную передаточную функцию

$$Y(p) = X(p) \cdot W(p). \quad (2.40)$$

Для определения оригинала $y(t)$ используют либо таблицы перехода от L - преобразования к оригиналу, либо формулы разложения [2].

Имеются две разновидности формулы разложения, которые справедливы для различных структур изображений [2].

Так, изображению (2.40) в виде рациональной дроби

$$Y(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n} = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad n \geq m \quad (2.41)$$

соответствует оригинал

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot e^{p_i t}, \quad (2.42)$$

где p_i - корни полинома знаменателя (2.41),

n - количество корней.

Необходимо помнить, что перед подстановкой корней в полином знаменателя (2.42) берется производная полинома $B(p)$.

Второй вид формулы разложения используется в случае, когда выражение (2.41) содержит нулевой полюс

$$Y(p) = \frac{A(p)}{p \cdot B(p)}. \quad (2.43)$$

В этом случае формула разложения имеет вид

$$y(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{p_i \cdot B'(p_i)} \cdot e^{p_i t}. \quad (2.44)$$

Формулы разложения (2.42), (2.44) имеют значительные ограничения, так как не всегда уравнение «вход-выход» можно привести к виду (2.41), (2.43). Действительно, только при входном сигнале в виде ступенчатой функции операторное уравнение линейного звена имеет вид (2.43). При входных сигналах сложной формы операторное уравнение имеет более сложную структуру. Следует также иметь в виду, что при определении оригинала необходимо находить корни полинома знаменателя $B(p)$. Если операторная передаточная функция $W(p)$ в (2.40) высокого порядка, то возникают значительные трудности в определении корней.

Для снятия указанных ограничений разработаны более эффективные бескорневые методы [3]. Рассмотрим один из весьма эффективных бескорневых методов - метод *цифрового* моделирования.

2.5. Метод цифрового моделирования

Такое название метод получил вследствие того, что при его использовании находится унифицированная математическая модель исследуемого линейного устройства (звена) в виде рекурсивного разностного уравнения. Унифицированная

математическая модель названа *цифровой* моделью, так как ее структура аналогична структуре рекурсивного уравнения *цифрового* фильтра.

Так, для линейного звена произвольной сложности, имеющего один вход и один выход, при воздействии на вход сигнала произвольного вида рекурсивное разностное уравнение (цифровая модель) имеет вид

$$y[nT] = \frac{1}{B_l} \left\{ \sum_{v=0}^l A_{l-v} \cdot x[nT - vT] - \sum_{v=1}^l B_{l-v} \cdot y[nT - vT] \right\}, \quad (2.45)$$

где l - порядок операторной передаточной функции $W(p)$ звена;

$x[nT]$ - входной сигнал произвольной формы в виде решетчатой функции;

$y[nT]$ - выходной сигнал;

nT - дискретное время ($n=0, 1, 2, \dots$, T - период дискретизации);

A_i - коэффициенты, которые определяются через коэффициенты a_i числителя операторной передаточной функции

$$W(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_l \cdot p^l}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_l \cdot p^l};$$

B_i - коэффициенты, определяемые через коэффициенты b_i знаменателя операторной передаточной функции $W(p)$.

Вывод рекурсивного уравнения (2.45) и основы теории цифрового моделирования изложены в учебном пособии [4], здесь же мы поясним лишь как пользоваться уравнением (2.45).

При выводе рекурсивного уравнения (2.45) был сделан переход от непрерывного времени t к дискретному времени nT , поэтому непрерывная функция времени (непрерывный сигнал) заменена решетчатой функцией. Вместо дифференциальных уравнений используются разностные уравнения, а поэтому обычное преобразование Лапласа заменено дискретным преобразованием Лапласа или Z-преобразованием.

В результате расчетов с помощью уравнения (2.45) получается выходной сигнал в виде решетчатой функции.

При устремлении периода дискретизации T к нулю ($T \rightarrow 0$), выходная решетчатая функция приближается к непрерывной функции $y[nT] \rightarrow y(t)$.

Определение коэффициентов A_i, B_i рекурсивного уравнения (2.45) максимально формализовано.

Так, для определения коэффициентов A_i составляется матрица коэффициентов

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{S}_l \cdot \bar{\mathbf{a}}_l, \quad (2.46)$$

где \mathbf{S}_l - матрица перехода от обычного преобразования Лапласа (L -преобразования) к Z-преобразованию; $\bar{\mathbf{a}}_l$ - матрица-столбец (вектор), составленная из коэффициентов числителя операторной передаточной функции $W(p)$ моделируемого линейного звена.

Матрицы перехода от L к Z-преобразованию опубликованы в литературе по цифровому моделированию [3,4]. Ниже приведены матрицы перехода \mathbf{S}_l для $l = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{S}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{10}{3} & 0 & -2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{S}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{S}_4 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{124}{45} & -4 & \frac{8}{3} & 2 & -4 \\ \frac{158}{45} & 0 & -6 & 0 & 6 \\ \frac{5}{124} & 4 & \frac{8}{3} & -2 & -4 \\ -\frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Коэффициенты B_i рекурсивного уравнения (2.45) находятся аналогично.

Составляется матрица коэффициентов

$$\mathbf{B}_l = \mathbf{S}_l \cdot \vec{b}_l, \tag{2.48}$$

где \mathbf{S}_l - матрица перехода от L к Z -преобразованию, \vec{b}_l - матрица-столбец, составленная из коэффициентов знаменателя операторной передаточной функции $W(p)$ моделируемого звена.

В качестве примера составим цифровую модель пропорционально-интегрирующего фильтра (рис.2.9).

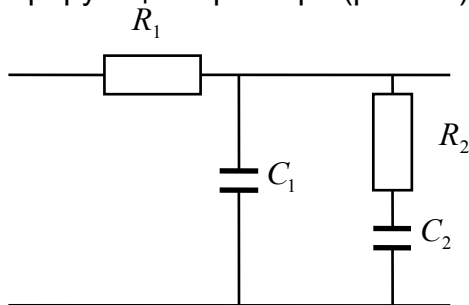


Рис.2.9

Операторная передаточная функция фильтра второго порядка ($l=2$)

$$W(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2}, \tag{2.49}$$

где $a_0 = 1$; $a_1 = R_2 C_2$; $a_2 = 0$;

$b_0 = 1$; $b_1 = R_2 C_2 + R_1(C_1 + C_2)$; $b_2 = R_1 R_2 C_1 C_2$.

Если на вход фильтра поступает произвольный входной сигнал $x[nT]$, то

рекурсивное уравнение (цифровая модель) фильтра на основании (2.45) будет иметь вид

$$y[nT] = \frac{1}{B_2} \left\{ \sum_{v=0}^2 A_{2-v} \cdot x[nT - vT] - \sum_{v=1}^2 B_{2-v} \cdot y[nT - vT] \right\}. \tag{2.50}$$

Конкретизируем постановку задачи: пусть требуется рассчитать переходную характеристику пропорционально-интегрирующего фильтра. В этом случае входной сигнал представляет собой единичную ступенчатую функцию $x[nT] = \mathbf{1}[nT]$, а рекурсивное уравнение (2.50) принимает вид:

$$h[nT] = \frac{1}{B_2} \left\{ \sum_{v=0}^2 A_{2-v} \cdot \mathbf{1}[nT - vT] - \sum_{v=1}^2 B_{2-v} \cdot h[nT - vT] \right\}. \tag{2.51}$$

Для определения коэффициентов рекурсивного уравнения A_i составляем матрицу коэффициентов

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{S}_2 \cdot \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{10}{3} & 0 & -2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{T}{2}\right)^2 \cdot a_0 \\ \frac{T}{2} \cdot a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находим коэффициенты B_i

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{S}_2 \cdot \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{10}{3} & 0 & -2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{T}{2}\right)^2 \cdot b_0 \\ \frac{T}{2} \cdot b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренный метод цифрового моделирования позволяет весьма эффективно исследовать непрерывные и дискретные САУ.

2.6. Цифровая модель замкнутой САУ

Рассмотрим порядок составления цифровой модели замкнутой САУ на примере одноконтурной астатической САУ (рис.2.10).

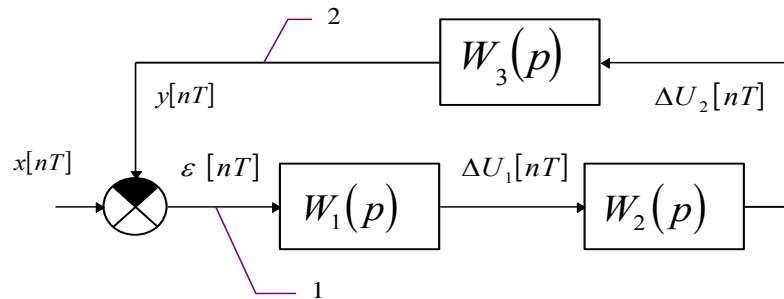


Рис.2.10

Предполагаем, что операторные передаточные функции контура управления известны. Первое звено - аperiodическое, поэтому

$$W_1(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p}{b_0 + b_1 \cdot p},$$

где $a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $b_0 = 1$; $b_1 = T_1$.

Второе звено - пропорционально-интегрирующий фильтр 2-го порядка, его операторная передаточная функция

$$W_2(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2};$$

где $a_0 = 1$; $a_1 = R_2 C_2$; $a_2 = 0$;

$$b_0 = 1; \quad b_1 = R_2 C_2 + R_1(C_1 + C_2); \quad b_2 = R_1 R_2 C_1 C_2.$$

Третье звено - интегрирующее

$$W_3(p) = \frac{k_1}{p}.$$

Цифровая модель замкнутой САУ состоит из уравнения замыкания и трех рекурсивных уравнений «вход-выход» контура управления.

Уравнение замыкания

$$\varepsilon [nT] = x[nT] - y[nT]. \quad (2.52)$$

Рекурсивные уравнения «вход-выход»:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_1[nT] &= \frac{1}{B_1} \left\{ \sum_{v=0}^1 A_{1-v} \varepsilon [nT - vT] - B_0 \Delta U_1[nT - T] \right\}; \\ \Delta U_2[nT] &= \frac{1}{B_2'} \left\{ \sum_{v=0}^2 A_{2-v}' \Delta U_1[nT - vT] - \sum_{v=1}^2 B_{2-v}' \Delta U_2[nT - vT] \right\}; \\ y[nT] &= \frac{1}{B_1''} \left\{ \sum_{v=0}^1 A_{1-v}'' \Delta U_2[nT - vT] - B_0'' y[nT - T] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

По трем рекурсивным уравнениям (2.53) находится выходная переменная на выходе контура управления (точка 2 рис.2.10) при входной переменной $\varepsilon [nT]$ (точка 1 рис.2.10).

Аналогично можно составить цифровые модели более сложных замкнутых САУ.

Метод цифрового моделирования с успехом может быть использован при исследовании устойчивости и качества работы как непрерывных, так и дискретных линейных и нелинейных САУ. Исследования следует проводить на компьютере.

2.7. Анализ устойчивости линейных систем

Устойчивая система после окончания переходного процесса переходит в новое (установившееся) состояние. Устойчивость системы может быть определена в результате решения однородного дифференциального уравнения системы. Общий вид решения однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{ПЕР}} = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{p_i t}, \quad (2.54)$$

где p_i - корни характеристического уравнения;

C_i - постоянные, определяемые из начальных условий.

Характеристическое уравнение n -го порядка имеет n корней. Эти корни могут быть действительными или комплексными попарно сопряженными. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную или равную нулю действительную часть, то система будет неустойчива, так как в этом случае с ростом t выходная переменная $y_{\text{ПЕР}}$ (2.54) не устремляется к нулю.

Следовательно, наиболее естественным методом определения устойчивости системы является решение ее характеристического уравнения и определение знаков действительных частей полученных корней. Однако такой метод не может считаться приемлемым для большинства практических задач, так как возникают вычислительные трудности при решении алгебраических уравнений высоких степеней. Поэтому на практике применяются другие методы, позволяющие, не прибегая к определению корней характеристического уравнения, получить все

необходимые данные по устойчивости. Такие методы называются критериями устойчивости. Следует отметить, что все критерии устойчивости в той или иной форме используют тот факт, что у устойчивой системы действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, однако знак действительных частей корней устанавливается не непосредственно, а косвенным путем.

Имеется ряд критериев устойчивости: Гурвица, Михайлова, Найквиста и др.

Из перечисленных критериев устойчивости рассмотрим лишь критерий Найквиста, получивший наиболее широкое распространение благодаря его простоте, богатству физического содержания, наглядности результатов, легкости постановки эксперимента для проверки расчетов или получения недостающих сведений и отсутствию сложных вычислений.

Для исследования замкнутой системы на устойчивость при применении критерия Найквиста эту систему разрывают в какой-либо точке соединения направленных звеньев. При этом замкнутая система превращается в разомкнутую.

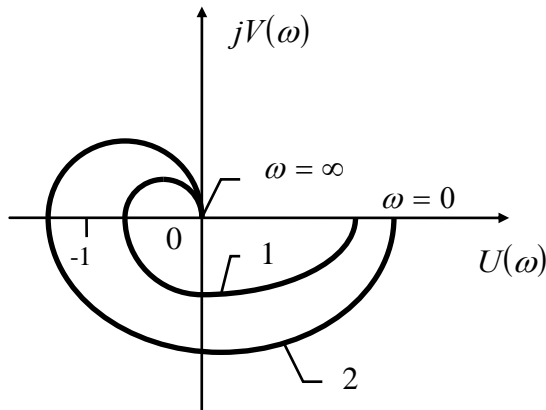


Рис.2.11

Критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом: если в системе, устойчивой в разомкнутом состоянии, годограф амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$, то эта система будет устойчива и в замкнутом состоянии (кривая 1 на рис.2.11); если же годограф охватывает эту точку, то в замкнутом состоянии система будет неустойчивой (кривая 2).

Для построения годографа амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы необходимо иметь выражение ее комплексного коэффициента передачи.

2.8. Исследование устойчивости САУ методом D - разбиения

Метод D - разбиения предусматривает выделение на плоскости параметров

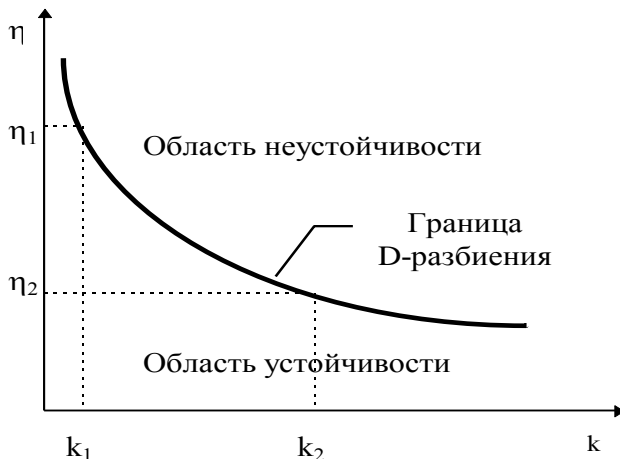


Рис.2.12

области устойчивости. Для этого строится граница D-разбиения, которая делит плоскость параметров на две области: устойчивости и неустойчивости. При построении области устойчивости следует выбирать параметры САУ, которые оказывают наибольшее влияние на устойчивость. Метод D-разбиения имеет большое практическое значение, так как позволяет контролировать

допустимый диапазон изменения параметров САУ.

Практически граница D-разбиения (рис.2.12) строится следующим образом.

Выбираются два параметра η и k , изменение которых значительно влияет на устойчивость САУ. Задаются значением параметра $\eta=\eta_1$ и изменяют параметр k до значения $k=k_1$, при котором САУ переходит в неустойчивое состояние. Далее

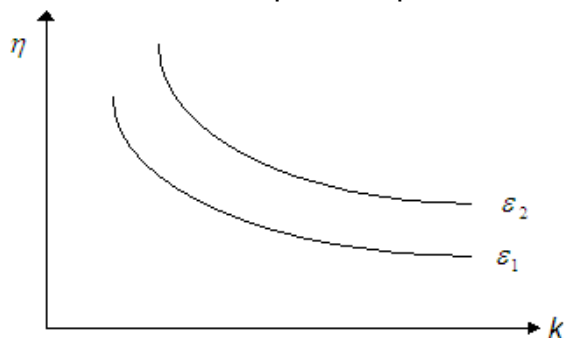


Рис.2.13

задаются значением $\eta=\eta_2$ и находят новое значение $k=k_2$, соответствующее границе перехода САУ в неустойчивое состояние и т.д. По найденным точкам строится граница D-разбиения. Так же можно построить семейство границ D-разбиения.

Так, на рис.2.13 построено семейство границ D-разбиения для случая, когда изменяются три параметра η , ε и k . В этом случае задаются параметром $\varepsilon=\varepsilon_1$ и строится граница D-разбиения при изменении

параметров η и k . Затем задаются новым значением $\varepsilon=\varepsilon_2$ и аналогично строится граница D-разбиения и т.д. В результате находится семейство границ D-разбиения.

Для реализации метода D-разбиения, как следует из вышеизложенного, необходимо определять момент перехода САУ из устойчивого состояния в неустойчивое при изменении параметров. Эта задача наиболее эффективно может быть решена методом цифрового моделирования с использованием ЭВМ.

2.9. Исследование качества процесса управления (регулирования)

Устойчивость является необходимым, но недостаточным требованием, определяющим возможность использования системы.

Для оценки пригодности системы в каждом конкретном случае применения используются следующие показатели качества САУ:

- точность системы, характеризующуюся величиной ошибки в установившемся режиме;
- характер переходного процесса.

Чтобы создать единообразие в оценке, принято рассматривать переходный процесс как реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие. Такое скачкообразное изменение внешнего возмущения создает наиболее тяжелые условия для работы системы.

В общем случае, внешние воздействия (возмущения) могут быть детерминированными и случайными функциями времени. Для оценки качества системы при возмущениях, представляющих случайные функции времени, используется показатель качества - вероятность ошибки. Ошибка САУ в установившемся режиме определяется по окончании переходного процесса, вызванного единичным ступенчатым воздействием. Величина ошибки может быть найдена при решении дифференциального уравнения системы. При этом полное решение дифференциального уравнения системы может рассматриваться в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения:

$$\varepsilon_{\text{общ}} = \varepsilon_{\text{уст}} + \varepsilon_{\text{пер}} \cdot \quad (2.55)$$

Для устойчивой системы решение однородного дифференциального уравнения стремится к нулю:

$$\varepsilon_{\text{ПЕР}} = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{p_i t} \rightarrow 0. \quad (2.56)$$

Следовательно, ошибка в установившемся режиме будет определяться частным решением неоднородного дифференциального уравнения.

Системы автоматического управления (регулирования) делятся на статические и астатические. Такое деление производится по признаку характера установившейся ошибки в САУ при ступенчатом (скачкообразном) воздействии.

Установившаяся ошибка САУ при скачкообразном изменении входной величины называется статической ошибкой.

Системы автоматического управления, статическая ошибка которых не равна нулю, называются статическими системами. Соответственно, системы автоматического управления, установившаяся ошибка которых равна нулю, называются астатическими системами.

Чтобы определить, к статической или астатической системе относится САУ, не обязательно решать дифференциальное уравнение замкнутой системы при скачкообразном воздействии. Для ответа на этот вопрос достаточно иметь выражение передаточной функции разомкнутого контура управления исследуемой замкнутой САУ.

Признаком астатической САУ является наличие в разомкнутом контуре управления интегрирующего (астатического) звена, то есть звена с передаточной функцией: $W(p) = 1/p$. Если в разомкнутом контуре САУ отсутствует интегрирующее звено, то САУ относится к статическим системам. В этом можно убедиться, если найти $\varepsilon(t)$ при скачкообразном (ступенчатом) воздействии. Количество интегрирующих звеньев в системе определяет порядок астатизма системы. Имеется также понятие - порядок воздействия, под которым надо понимать порядок фиксированной производной воздействия.

Введение в систему определенного количества интегрирующих звеньев позволяет ограничить или совсем ликвидировать установившуюся ошибку $\varepsilon_{\text{уст}}$ при наличии воздействия, непрерывно изменяющегося с постоянной производной.

В качестве примеров статической и астатической САУ, как будет показано, можно привести системы частотной и фазовой автоподстройки частоты (ЧАП и ФАП).

Вторым показателем качества САУ является характер переходного процесса. Основными показателями переходного процесса являются (рис.2.14):

- максимальное перерегулирование, выражающее отношение максимального значения выходной величины в переходном процессе к установившемуся значению выходной величины :

$$h_m = \frac{h_{\text{MAX1}}}{h_{\text{уст}}}, \quad (2.57)$$

где $h_{\text{уст}}$ - значение выходной величины при $t \rightarrow \infty$;

• время наступления первого максимума выходной величины (максимального перерегулирования) t_p ;

• длительность переходного процесса t_s , т.е. интервал времени между подачей внешнего возмущения и окончанием переходного процесса. Обычно считают, что переходный процесс закончился, если выходная величина отличается от установившегося значения не более чем на 5 %;

- частота колебаний в переходном процессе ω_t .

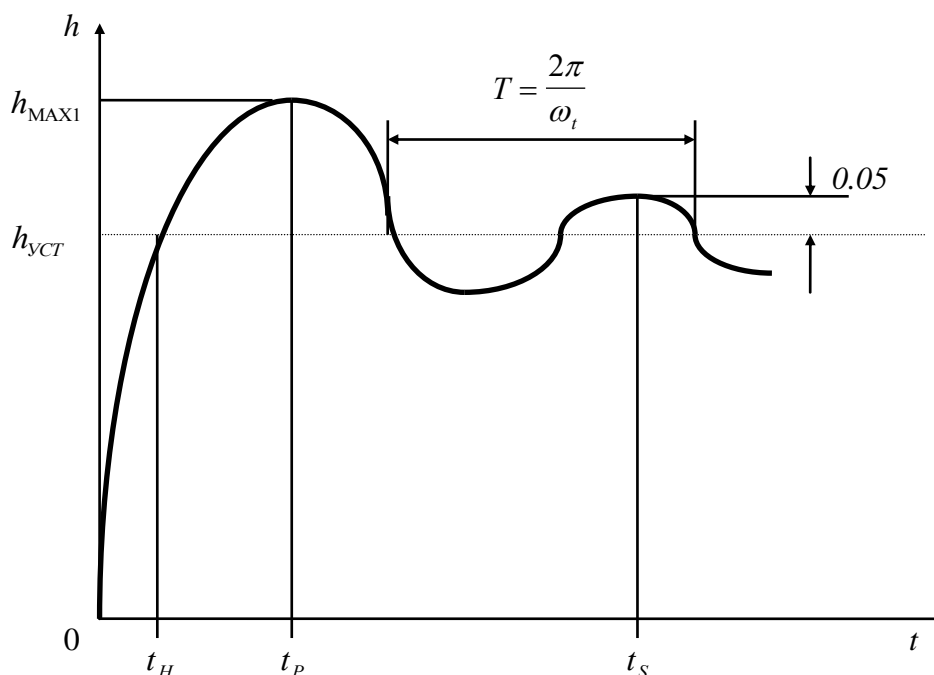


Рис.2.14

Для определения показателей переходного процесса необходимо получить переходную характеристику замкнутой САУ, т.е. найти реакцию САУ на единичное скачкообразное возмущение.

2.10. Понятие о методах коррекции САУ

Коррекция системы должна обеспечить требуемые характеристики системы, т.е. заданные запасы устойчивости и показатели переходного процесса. Коррекция системы относится к области синтеза систем, так как при расчете коррекции нужно выяснить, какие дополнительные звенья должны быть введены в систему для обеспечения заданных характеристик.

Обычно необходимые запасы устойчивости и показатели переходного процесса обеспечиваются за счет добавления соответствующих корректирующих звеньев последовательно с основными звеньями или введения дополнительных обратных связей.

В некоторых случаях система без корректирующих звеньев вообще не может работать, так как она является структурно неустойчивой, т.е. имеет такую структуру, при которой годограф амплитудно-фазовой характеристики при любом усилении в контуре регулирования охватывает точку $(-1, j0)$. Примером может служить система, содержащая два интегрирующих звена, соединенных последовательно.

Корректирующие устройства используются также для изменения полосы пропускания системы, что позволяет уменьшить влияние помех. Корректирующие звенья имеют особо подобранные передаточные функции. Они могут включаться либо последовательно с основными звеньями САУ, либо параллельно им. Наиболее часто они включаются между двумя интегрирующими звеньями.

Наибольшее применение получили следующие последовательные корректирующие звенья: пропорционально-дифференцирующие, пропорционально-интегрирующие, пропорционально-интегрирующе-дифференцирующие.

Идеальное пропорционально-дифференцирующее звено имеет следующую передаточную функцию:

$$W_{\text{ИД}} = k_{\text{П}} + k_{\text{Д}} \cdot p. \quad (2.58)$$

Отсюда видно, что в соответствии с назначением этого звена его выходная величина содержит две составляющие - пропорциональную входной величине и определяемую коэффициентом $k_{\text{П}}$ и пропорциональную ее первой производной, определяемую коэффициентом $k_{\text{Д}}$.

Включение пропорционально-интегрирующего звена в САУ приводит к тому, что передаточная функция $W_2(p)$ системы становится равной:

$$W_2(p) = (k_{\text{П}} + k_{\text{Д}}p) \cdot W_1(p). \quad (2.59)$$

Покажем с помощью амплитудно-фазовых характеристик, какой эффект может быть достигнут при введении производной в систему автоматического управления.

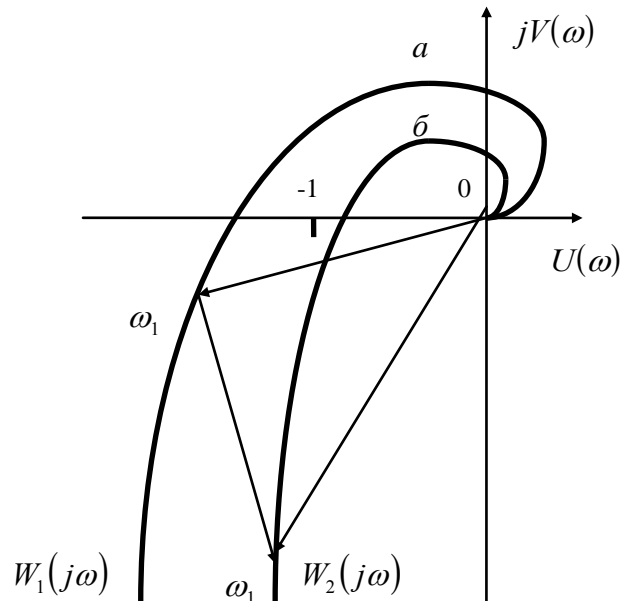


Рис.2.15

На рис.2.15 изображена амплитудно-фазовая характеристика неустойчивой САУ. При включении пропорционально-дифференцирующего звена амплитудно-фазовая характеристика системы примет вид:

$$W_2(j\omega) = (k_{\text{П}} + k_{\text{Д}}j\omega) \cdot W_1(j\omega). \quad (2.60)$$

Пусть $k_{\text{П}} = 1$, тогда

$$W_2(j\omega) = (1 + k_{\text{Д}}j\omega) \cdot W_1(j\omega) = W_1(j\omega) + j\omega k_{\text{Д}} W_1(j\omega). \quad (2.61)$$

Из выражения (2.61) видно, что $W_2(j\omega)$ (кривая b на рис.2.15) получается из $W_1(j\omega)$ (кривая a), если в каждой точке кривой a к вектору $W_1(j\omega)$ прибавить перпендикулярный к нему (под углом $\pi/2$) вектор, длина которого в $k_{\text{Д}}$ раз больше длины вектора $W_1(j\omega)$.

Таким образом, за счет составляющей $j\omega k_D W_1(j\omega)$ вектор $W_2(j\omega)$ опережает $W_1(j\omega)$ на угол, зависящий от коэффициента k_D и частоты ω . Но это как раз и является необходимым для того, чтобы кривая \bar{b} не охватывала точку $-1, j0$, т.е. чтобы система стала устойчивой.

При правильно выбранном значении k_D можно сделать систему не только устойчивой, но и добиться наилучшего возможного для данной системы качества.

Следует отметить, что при введении производных система становится более чувствительной к высокочастотным помехам.

Влияние пропорционально - дифференцирующего звена на качество переходных процессов продемонстрируем на примере последовательного соединения этого звена с инерционным звеном.

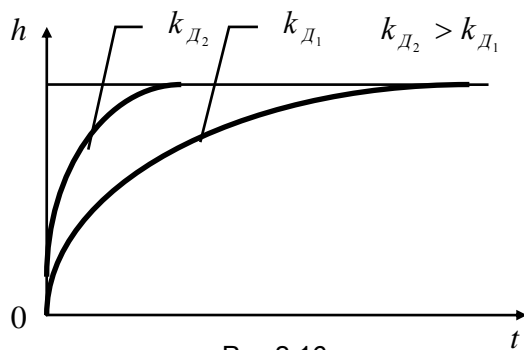


Рис.2.16

На рис.2.16 приведены переходные характеристики последовательного соединения звеньев. Из характеристик видно, что дополнительное положительное воздействие по производной повышает быстродействие системы, причем с увеличением k_D быстродействие возрастает.

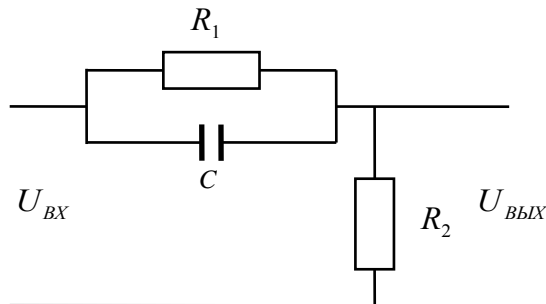


Рис.2.17

Практически пропорционально-дифференцирующие звенья (рис.2.17) имеют существенную инерционность, и их передаточная функция

$$W_{\text{ИД}}(p) = \frac{k_{\text{П}} + k_{\text{Д}} p}{T_{\text{ИД}} p + 1}; \quad k_{\text{П}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad k_{\text{Д}} = T_{\text{ИД}} = k_{\text{П}} C R_1. \quad (2.62)$$

Инерционное пропорционально-дифференцирующее звено можно представить как последовательное соединение идеального пропорционально-дифференцирующего звена и обычного инерционного звеньев. Поэтому все сказанное выше о влиянии идеального пропорционально-дифференцирующего звена на устойчивость и качество переходного процесса справедливо и для инерционного звена такого типа с той лишь разницей, что последнее звено влияет слабее на быстродействие системы и соответственно на ее устойчивость.

Также для цепей коррекции в САУ применяются интегрирующие звенья. Как ранее показано, введение одного интегрирующего звена превращает статическую систему в астатическую - с астатизмом 1-го порядка, которая не имеет установившейся (статической) ошибки по регулируемой координате. При введении

дополнительно еще одного интегрирующего звена порядок астатизма системы увеличивается до 2-го, и система не имеет установившейся скоростной ошибки.

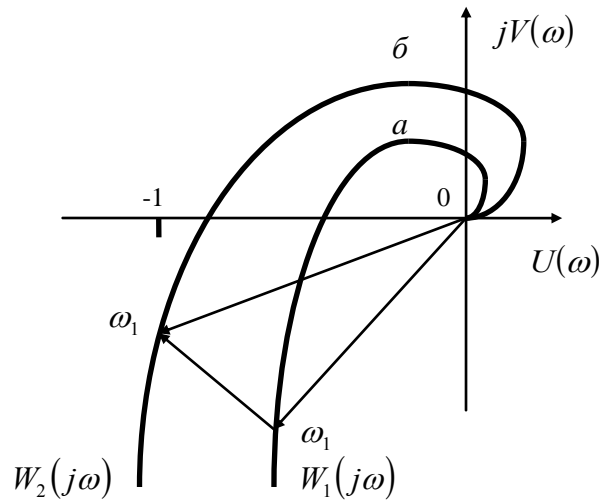


Рис.2.18

Следует заметить, что введение воздействия по интегралу n/p в управляющий сигнал приводит к повороту амплитудно-фазовой характеристики по часовой стрелке, т.е. неблагоприятную в отношении устойчивости сторону (рис.2.18). На рис.2.18 изображены амплитудно-фазовые характеристики системы $W_1(j\omega)$ и той же системы $W_2(j\omega)$ после введения в управляющий сигнал составляющей, пропорциональной интегралу от отклонения. Амплитудно-фазовая характеристика $W_2(j\omega)$ приблизилась к критической точке $-1, j0$.

Система с интегральным управлением менее чувствительна к высокочастотным помехам по сравнению с системами, реагирующими на производные.

Вторым видом корректирующих устройств являются параллельные корректирующие устройства, реализуемые в виде местных обратных связей, охватывающих одно или несколько звеньев системы. Различают два вида обратных связей:

- жесткую, при которой выходная величина звеньев, охваченных этой связью, подается на вход. Жесткая обратная связь воздействует на систему как при переходных процессах, так и в установившемся состоянии;
- гибкую, при которой передаются производные выходной величины этой группы звеньев. Гибкая обратная связь воздействует на систему только при переходных процессах, т.е. когда выходной сигнал меняется во времени.

При охвате звена с передаточной функцией $W(p)$ обратной связью через корректирующее звено с передаточной функцией $W_{oc}(p)$ получаем, используя (2.34), передаточную функцию

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 \pm W_o(p) \cdot W_{oc}(p)}, \quad (2.63)$$

где плюс в знаменателе соответствует отрицательной, а минус - положительной обратным связям.

Рассмотрим сначала действие идеальной жесткой обратной связи. Ее передаточная функция $W_{oc}(p) = W_{oc}$. В случае, если эта обратная связь охватывает простое апериодическое звено, когда

$$W_o(p) = \frac{W_o}{1 + T_o p}, \quad (2.64)$$

то

$$W(p) = \frac{\frac{W_o}{1 + T_o p}}{1 \pm \frac{W_o W_{oc}}{1 + T_o p}} = \frac{W_o}{1 + T_o p \pm W_o W_{oc}}, \quad (2.65)$$

или

$$W(p) = \frac{W}{1 + T p},$$

где

$$W = \frac{W_o}{1 \pm W_o W_{oc}}; \quad T = \frac{T_o}{1 \pm W_o W_{oc}}.$$

Таким образом, в результате охвата апериодического звена жесткой обратной связью его постоянная времени и коэффициент передачи изменяются в $(1 \pm W_o W_{oc})$ раз, т.е. они уменьшаются в случае отрицательной обратной связи и увеличиваются при положительной. В качестве корректирующей обратной связи применяется в основном отрицательная обратная связь для уменьшения инерционности. Отрицательная обратная связь имеет и другие достоинства: уменьшает нелинейность статической характеристики звена, нестабильность его параметров во времени, а также уменьшает уровень шумов на выходе звена.

В качестве примера гибкой обратной связи рассмотрим обратную связь в виде идеального дифференцирующего звена. Это случай так называемой идеальной гибкой обратной связи или обратной связи по скорости.

Передаточная функция в этом случае равна $W_{oc}(p) = k_{oc} p$.

Для звена с передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{k_o}{Q(p)}$$

имеем

$$W(p) = \frac{\frac{k_o}{Q(p)}}{1 \pm \frac{k_o k_{oc} \cdot p}{Q(p)}} = \frac{k_o}{Q(p) \pm k_o k_{oc} \cdot p}. \quad (2.66)$$

Следовательно, гибкая обратная связь, не влияя на коэффициент передачи охватываемого обратной связью звена, изменяет коэффициент при p в знаменателе его передаточной функции.

В случае апериодического звена 1-го порядка, когда

$$W_o(p) = \frac{k_o}{1 + T_o p},$$

имеем

$$W(p) = \frac{k_o}{(T_o \pm k_o k_{oc})p + 1}, \quad (2.67)$$

т.е. постоянная времени звена изменяется на величину, пропорциональную коэффициенту обратной связи, причем отрицательная обратная связь увеличивает постоянную времени, а положительная - уменьшает. При этом в отличие от отрицательной жесткой обратной связи, появляется возможность повышения быстродействия без снижения коэффициента передачи звена.

2.11. Чувствительность САУ

Чувствительность САУ характеризует влияние изменений параметров элементов на их свойства. Вариация элементов автоматической системы приводит к изменению передаточной функции замкнутой автоматической системы, а значит в итоге, и изменению величин, характеризующих ее состояние.

Для количественного учета всех этих изменений служат функции чувствительности

$$V_{W_s}^W(p) = \frac{dW(p)}{dW_s(p)}, \quad (2.68)$$

где $W(p)$, $W_s(p)$ - передаточные функции замкнутой системы и варьируемого элемента (звена) соответственно.

Используют также логарифмическую функцию чувствительности или просто чувствительность $S_{W_s}^W(p)$ передаточной функции замкнутой системы $W(p)$ по передаточной функции варьируемого элемента $W_s(p)$, определяемую так:

$$S_{W_s}^W(p) = \frac{d \ln W(p)}{d \ln W_s(p)} = \frac{\frac{dW(p)}{W(p)}}{\frac{dW_s(p)}{W_s(p)}}. \quad (2.69)$$

Чувствительность $S_{W_s}^W(p)$ представляет собой отношение относительных изменений передаточной функции замкнутой системы и передаточной функции изменяемого элемента. Чем меньше чувствительность $S_{W_s}^W(p)$ или функция чувствительности $V_{W_s}^W(p)$, тем меньше влияние передаточной функции $W_s(p)$ рассматриваемого звена на свойства автоматической системы. Говоря об уменьшении или увеличении чувствительности, всегда подразумевают уменьшение или увеличение ее модуля.

Итак, чем меньше чувствительность САУ, тем система более высококачественна.

3. ПРИМЕРЫ СТАТИЧЕСКОЙ И АСТАТИЧЕСКОЙ САУ

3.1. Система автоматической подстройки частоты

Система автоматической подстройки частоты (АПЧ) относится к статическим САУ. Функциональная схема АПЧ изображена на рис.3.1. В частотном дискриминаторе производится сравнение заданного и фактического значения частоты ω . В результате этого сравнения дискриминатор вырабатывает

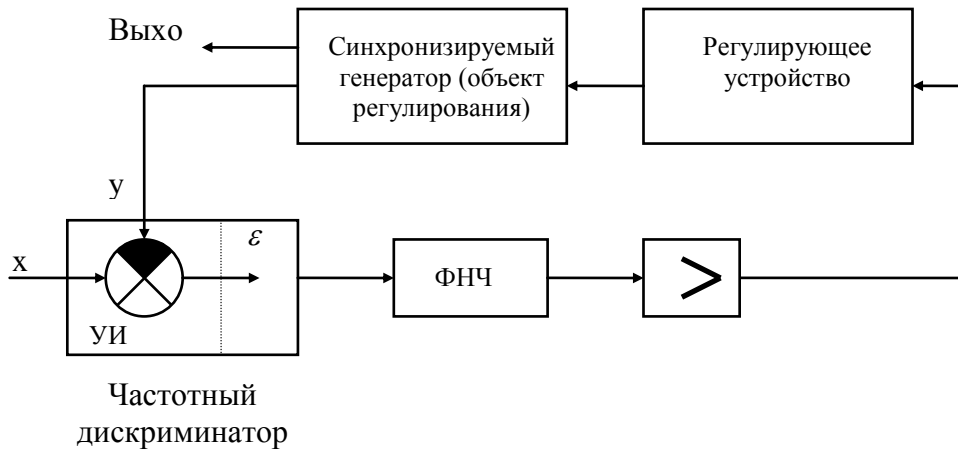


Рис.3.1

напряжение пропорциональное отклонению частоты ω от заданного значения. Это напряжение сглаживается фильтром, усиливается усилителем и поступает на регулирующее устройство (реактивную лампу или управляемую емкость - варикап, варактор), которое меняет частоту колебаний ω , генерируемых гетеродином.

Систему АПЧ следует рассматривать как следящую систему, в которой частота гетеродина следит за частотой входного сигнала.

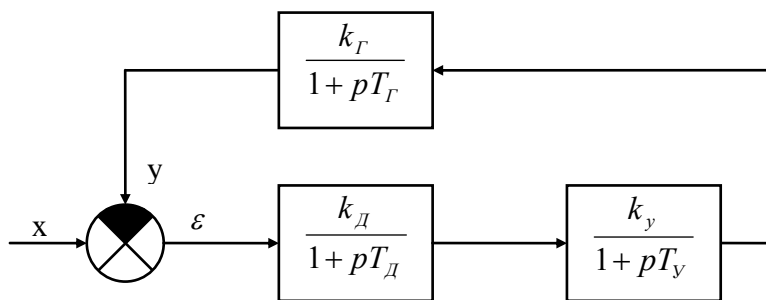


Рис.3.2

Для составления структурной схемы АПЧ заменим элементарные звенья системы элементарными типовыми звеньями. Дискриминатор и ФНЧ могут быть представлены в виде инерционного звена с коэффициентом усиления k_D и постоянной времени T_D . Усилитель постоянного тока и гетеродин можно также заменить инерционными звеньями с коэффициентами усиления k_Y , k_G и постоянными времени T_Y , T_G . В результате такой замены получаем структурную схему, изображенную на рис.3.2.

Передаточные функции отдельных звеньев

- дискриминатора и ФНЧ (инерционное звено):

$$W_d(p) = \frac{k_d}{1 + pT_d};$$

- усилителя постоянного тока (инерционное звено):

$$W_v(p) = \frac{k_v}{1 + pT_v};$$

- гетеродина (инерционное звено):

$$W_r(p) = \frac{k_r}{1 + pT_r}.$$

Если обозначить общий коэффициент усиления через $k = k_d \cdot k_v \cdot k_r$, то передаточная функция разомкнутой системы АПЧ

$$W(p) = \frac{k}{(1 + pT_d)(1 + pT_v)(1 + pT_r)}. \quad (3.1)$$

Используя уравнение (2.35), можно перейти к передаточной функции замкнутой системы АПЧ

$$W_3(p) = \frac{k}{(1 + pT_d)(1 + pT_v)(1 + pT_r) + k}. \quad (3.2)$$

В разомкнутом контуре регулирования АПЧ отсутствует интегрирующее звено, поэтому, как ранее было сказано, эта САУ относится к статическим.

Исследуем устойчивость статической системы АПЧ. Для этого воспользуемся критерием устойчивости Найквиста. Значение комплексного коэффициента передачи разомкнутой системы АПЧ будет определяться выражением, полученным из (3.1) при подстановке $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_d)(1 + j\omega T_v)(1 + j\omega T_r)}. \quad (3.3)$$

Годограф ККП (амплитудно-фазовая характеристика) может быть построен по следующим вычисленным значениям:

- АЧХ и ФЧХ для разных значений частоты;
- действительной и мнимой составляющих ККП для разных значений частоты.

Амплитудно-частотная характеристика системы АПЧ

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 + \omega^2 T_d^2)} \sqrt{(1 + \omega^2 T_v^2)} \sqrt{(1 + \omega^2 T_r^2)}}. \quad (3.4)$$

Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_d - \arctg \omega T_v - \arctg \omega T_r. \quad (3.5)$$

Для определения действительной и мнимой составляющих избавимся от иррациональности в знаменателе уравнения (3.3):

$$W(j\omega) = \frac{k \cdot (1 - j\omega T_d)(1 - j\omega T_v)(1 - j\omega T_r)}{(1 + \omega^2 T_d^2)(1 + \omega^2 T_v^2)(1 + \omega^2 T_r^2)}, \quad (3.6)$$

$$U(\omega) = \frac{k \cdot [(1 - \omega^2) \cdot (T_v T_d + T_v T_r + T_d T_r)]}{(1 + \omega^2 T_d^2)(1 + \omega^2 T_v^2)(1 + \omega^2 T_r^2)}, \quad (3.7)$$

$$V(\omega) = \frac{-k\omega \cdot (T_d + T_v + T_r - \omega^2 T_d T_v T_r)}{(1 + \omega^2 T_d^2)(1 + \omega^2 T_v^2)(1 + \omega^2 T_r^2)}. \quad (3.8)$$

Крайние значения частоты при

$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$
$W(\omega) \rightarrow k,$	$W(\omega) \rightarrow 0,$
$\varphi(\omega) \rightarrow 0,$	$\varphi(\omega) \rightarrow -3\pi / 2,$
$U(\omega) \rightarrow k,$	$U(\omega) \rightarrow 0,$
$V(\omega) \rightarrow 0,$	$V(\omega) \rightarrow 0.$

Если вычислить значения $W(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или $U(\omega)$ и $V(\omega)$ для промежуточных значениях частоты между нулем и бесконечностью, то по этим данным может быть построена амплитудно-фазовая характеристика.

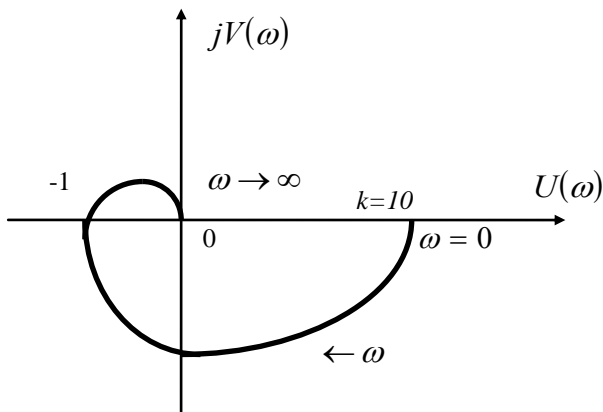


Рис.3.3

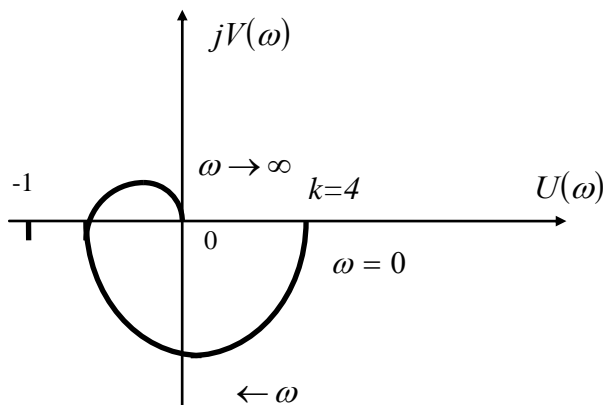


Рис.3.4

Зададимся значениями $T_v = 0.003c$, $T_d = 0.002c$, $T_r = 0.001c$ и $k = 10$. Для указанных значений T_v , T_d и T_r на рис.3.3 построена амплитудно-фазовая характеристика системы АПЧ. При таких значениях параметров система находится на границе устойчивости, так как амплитудно-фазовая характеристика пересекает точку с координатами $(-1, j0)$.

Если уменьшить коэффициент усиления системы до $k = 4$, то амплитудно-фазовая характеристика примет форму, показанную на рис.3.4. Согласно критерию Найквиста система АПЧ стала устойчивой, так как амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

Исследование качества процесса регулирования включает в себя определение статической ошибки и анализ характера переходного процесса при скачкообразном возмущении. Используя уравнение для определения ошибки (2.38) и

подставив в него выражение передаточной функции (3.2), получаем:

$$\varepsilon(p) = X(p) \frac{(1 + pT_d)(1 + pT_v)(1 + pT_r)}{k + (1 + pT_d)(1 + pT_v)(1 + pT_r)}. \quad (3.9)$$

Предполагаем, что частота скачком изменилась на величину $\Delta\omega$, т.е. $x(t) = \Delta\omega$.

Тогда на основании таблицы соответствий прямого и обратного преобразований Лапласа получаем:

$$X(p) = \frac{\Delta\omega}{p}. \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.9), находим

$$\varepsilon(p) = \frac{\Delta\omega \cdot (1 + pT_d)(1 + pT_v)(1 + pT_r)}{p \cdot [k + (1 + pT_d)(1 + pT_v)(1 + pT_r)]}. \quad (3.11)$$

Изображению (3.11) соответствует оригинал (таблица соответствий - прил.1)

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta\omega}{k+1} + \varepsilon_{пер}(t). \quad (3.12)$$

Первое слагаемое характеризует установившуюся (статическую) ошибку, а второе - переходный процесс, происходящий в системе АПЧ:

$$\varepsilon_{ст}(t) = \frac{\Delta\omega}{k+1}. \quad (3.13)$$

Из уравнения (3.13) видно, что ошибка в статической системе АПЧ пропорциональна величине внешнего возмущения $\Delta\omega$ и обратно пропорциональна общему коэффициенту усиления (точнее, величине $k+1$).

Таким образом, статическая система АПЧ работает с точностью до частоты: в установившемся режиме всегда будет остаточная расстройка по частоте, равная (3.13).

3.2. Система фазовой автоподстройки частоты

Фазовая автоподстройка частоты (ФАПЧ) относится к астатическим САУ. ФАПЧ работает с точностью до фазы, т.е. при образовании взаимной частотной расстройки между синхронизирующим и синхронизируемым генераторами она компенсирует эту расстройку до нуля за счет образования некоторого фазового сдвига между двумя сравниваемыми колебаниями.

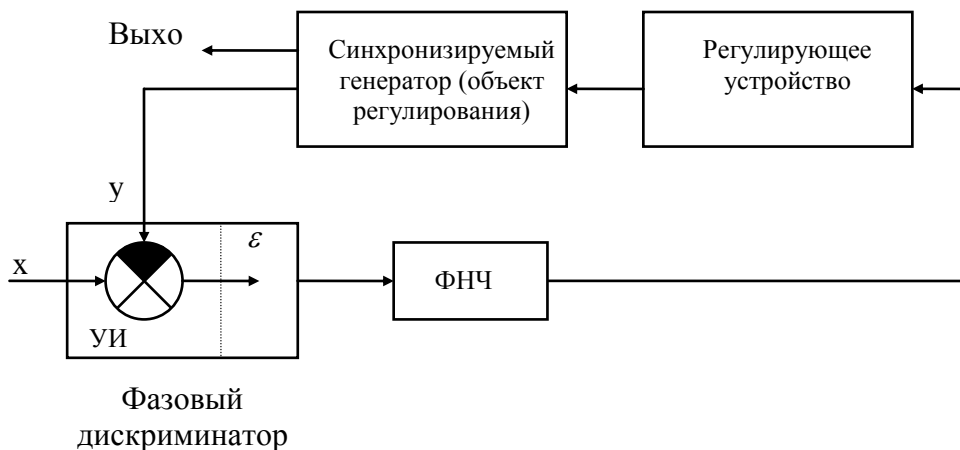


Рис.3.5

Вследствие этого качественного преимущества, по сравнению с системой АПЧ, система ФАПЧ получила широкое применение в технике связи (в синтезаторах частоты радиопередающей и радиоприемной аппаратуры, в качестве следящих фильтров, в системах тактовой синхронизации и т.д.).

Система ФАПЧ относится к следящим системам, причем, как далее будет показано, является астатической САУ. Основными функциональными звеньями,

входящими в систему ФАПЧ (рис.3.5), являются: фазовый дискриминатор (детектор) (ФД), фильтр нижних частот (ФНЧ), регулирующее устройство (РУ), синхронизируемый генератор (СГ). Синхронизируемый генератор является объектом регулирования. Фазовый детектор выполняет роль устройства измерения (УИ).

Будем считать перечисленные звенья - линейными и обладающими свойством направленности. Сделанное предположение справедливо лишь тогда, когда между фазовым детектором и ФНЧ имеется развязка.

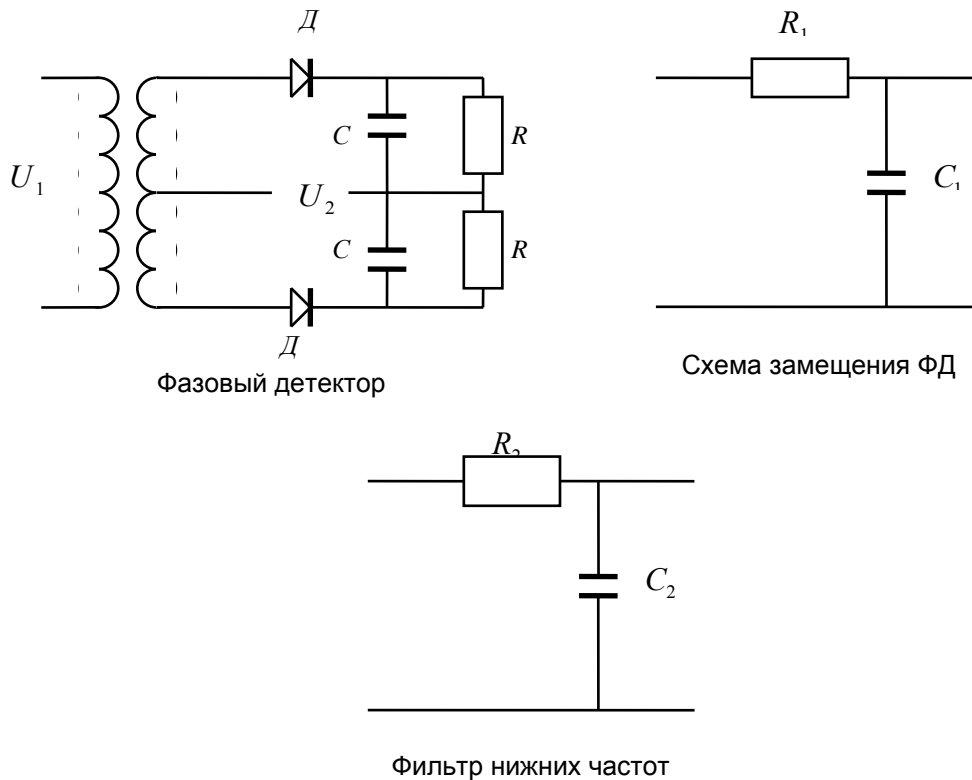


Рис.3.6

Для замены функциональных звеньев типовыми, изобразим принципиальные схемы отдельных звеньев (рис.3.6). Фазовый детектор может быть заменен инерционным звеном, фильтр нижних частот, также представляет собой инерционное звено. Остановимся более подробно на определении передаточной функции синхронизируемого генератора.

Под воздействием изменения напряжения на выходе ФНЧ изменятся частота синхронизируемого генератора. Как правило, закон изменения частоты генератора от напряжения на входе регулирующего устройства (реактивной лампы или варактора) линейный:

$$\Delta\omega = k_3 \Delta u. \quad (3.14)$$

Но в системе ФАПЧ измерительное устройство (фазовый детектор) сравнивает фазы, поэтому, определяя передаточную функцию синхронизируемого генератора, в качестве выходной его величины надо брать изменение фазы $\Delta\varphi$.

Изменения частоты и фазы связаны известным соотношением:

$$\Delta\omega = \frac{d\Delta\varphi(t)}{dt}$$

или, подставляя (3.14), получаем

$$k_3 \Delta u = \frac{d\Delta\varphi}{dt}. \quad (3.15)$$

Преобразуя левую и правую части уравнения (3.15) по Лапласу, получаем

$$k_3 \Delta U(p) = p \Delta \varphi(p). \quad (3.16)$$

Из уравнения (3.16) определяем передаточную функцию синхронизируемого генератора

$$W_r(p) = \frac{\Delta \varphi(p)}{\Delta U(p)} = \frac{k_3}{p}. \quad (3.17)$$

Таким образом, на основании полученной передаточной функции (3.17) можно сделать вывод, что синхронизируемый генератор является интегрирующим звеном.

В соответствии с передаточными функциями отдельных звеньев системы ФАПЧ изобразим структурную схему (рис.3.7). Передаточная функция разомкнутого контура регулирования равна произведению передаточных функций отдельных звеньев

$$W(p) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{p \cdot (1 + pT_1)(1 + pT_2)} = \frac{k}{p \cdot (1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (3.18)$$

Используя уравнение (2.34), определяем передаточную функцию замкнутой системы ФАПЧ

$$W_3(p) = \frac{k}{p \cdot (1 + pT_1)(1 + pT_2) + k}. \quad (3.19)$$

В разомкнутом контуре регулирования системы ФАПЧ имеется интегрирующее звено (синхронизируемый генератор), поэтому, как ранее было показано, эта САУ

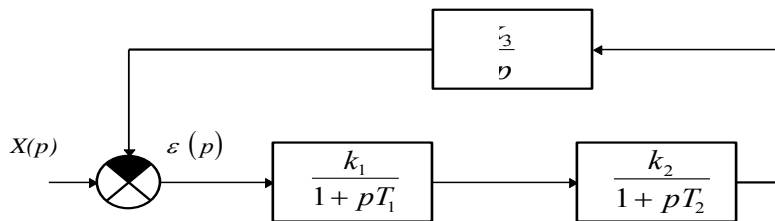


Рис.3.7

относится к астатическим. Исследуем устойчивость системы ФАПЧ, используя комплексный коэффициент передачи, который может быть определен из (3.18) путем замены p на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega \cdot (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}. \quad (3.20)$$

Выражения для амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик соответственно имеют вид:

$$W(\omega) = \frac{k}{\omega \cdot \sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}}. \quad (3.21)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2. \quad (3.22)$$

Из уравнений (3.21), (3.22) видно, что при

$$\begin{array}{ll} \omega \rightarrow 0 & \omega \rightarrow \infty \\ W(\omega) \rightarrow \infty, & W(\omega) \rightarrow 0, \\ \varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ, & \varphi(\omega) \rightarrow -270^\circ. \end{array}$$

Построим амплитудно-фазовую характеристику системы ФАПЧ, имеющей параметры $T_1 = 0.2c$, $T_2 = 0.02c$, $k = 20c^{-1}$ (рис.3.8):

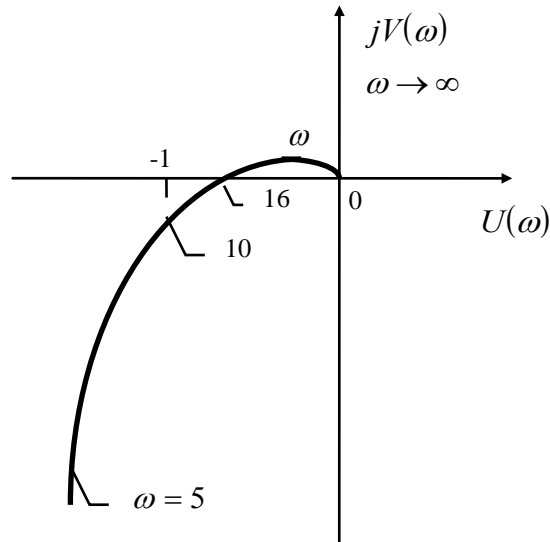


Рис.3.8

На основании критерия Найквиста видно, что система устойчива, так как кривая не охватывает точку $(-1, j0)$.

Перейдем к исследованию качественных характеристик системы ФАПЧ. В этой системе фазовый детектор реагирует на изменение фаз между сравниваемыми колебаниями. Предположим, что в системе имеет место скачкообразное изменение частоты, т.е. собственная частота синхронизируемого генератора изменилась на постоянную величину $\Delta\omega$. Определим ошибку, образуемую в системе. Используя уравнение для определения ошибки (2.38) и подставив в него выражение передаточной функции (3.19), получаем

$$\varepsilon(p) = X(p) \frac{p \cdot (1 + pT_1)(1 + pT_2)}{k + p \cdot (1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (3.23)$$

При определении $X(p)$ следует учесть, что фазовый детектор сравнивает фазы колебаний. Поэтому от изменения частоты на величину $\Delta\omega$, которое произошло в системе, перейдем к определению изменения фазы. Для этого воспользуемся выражением, связывающим частоту и фазу:

$$\Delta\omega = \frac{d\Delta\varphi}{dt}. \quad (3.24)$$

Преобразуя (3.24) по Лапласу и учитывая, что $\Delta\omega = \text{const}$, получаем:

$$\frac{\Delta\omega}{p} = p\Delta\varphi(p). \quad (3.25)$$

Из выражения (3.25) определяем $X(p)$:

$$X(p) = \Delta\varphi(p) = \frac{\Delta\omega}{p^2}. \quad (3.26)$$

Подставив (3.26) в (3.23), находим окончательное выражение для $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = \frac{\Delta\omega \cdot (1 + pT_1)(1 + pT_2)}{p \cdot [k + (1 + pT_1)(1 + pT_2)]}. \quad (3.27)$$

Используя таблицу соответствий изображений и оригиналов (прил.1), находим

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta\omega}{k} + \varepsilon_{\text{ПЕР}}(t). \quad (3.28)$$

В выражении (3.28) $\varepsilon(t)$ имеет физический смысл фазы. Первое слагаемое является величиной постоянной (не зависит от времени) и характеризует установившуюся ошибку, а второе слагаемое определяет наличие переходного процесса в системе после возмущения.

При $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon_{\text{ПЕР}}(t) \rightarrow 0$, тогда

$$\varepsilon_{\text{уст}}(t) = \frac{\Delta\omega}{k}. \quad (3.29)$$

Величина установившейся ошибки характеризует фазовый сдвиг, образующийся между сравниваемыми по фазе колебаниями после окончания переходного процесса при скачкообразном изменении частоты в системе ФАПЧ.

Из формулы (3.29) видно, что установившаяся ошибка тем меньше, чем больше общий коэффициент усиления k в кольце системы ФАПЧ. Эти выводы полностью совпадают с физическим процессом, происходящим в ФАПЧ.

Второе слагаемое соотношения (3.28) характеризует переходный процесс в системе ФАПЧ, имеющий место при скачкообразном изменении частоты регулируемого генератора. Исследуя эту составляющую, можно проанализировать динамические свойства системы ФАПЧ и определить динамическую ошибку, возникающую в процессе функционирования системы.

Важными характеристиками системы ФАПЧ являются также полосы удержания $\Delta\omega_y$ и схватывания $\Delta\omega_{cx}$.

При раскрытии понятия "полоса удержания" следует обратиться к процессу образования установившейся ошибки в системе ФАПЧ. В замкнутом кольце ФАПЧ, когда система функционирует нормально, в установившемся режиме частоты синхронизирующего и синхронизируемого генераторов равны, но между колебаниями имеется некоторый фазовый сдвиг, вызванный тем, что собственная частота синхронизируемого генератора (измеренная при разомкнутом кольце ФАПЧ) отличается от частоты синхронизирующего генератора. Сдвиг фаз, образующийся при наличии разности частот собственных колебаний генераторов, называется установившейся ошибкой (остаточной расстройкой по фазе). Именно за счет образования установившейся фазовой ошибки на выходе фазового детектора образуется напряжение, воздействующее на управляющий элемент синхронизируемого генератора, и его частота становится равной частоте синхронизирующего колебания, т.е. полностью устраняется частотная ошибка.

Очевидно, что с увеличением $\Delta\omega$ будет увеличиваться установившаяся ошибка (3.29) и наступит такой момент, когда произойдет срыв синхронизации. Это произойдет тогда, когда фазовый сдвиг превысит допустимую величину,

определяемую рабочим участком характеристики фазового детектора (рис.3.9).

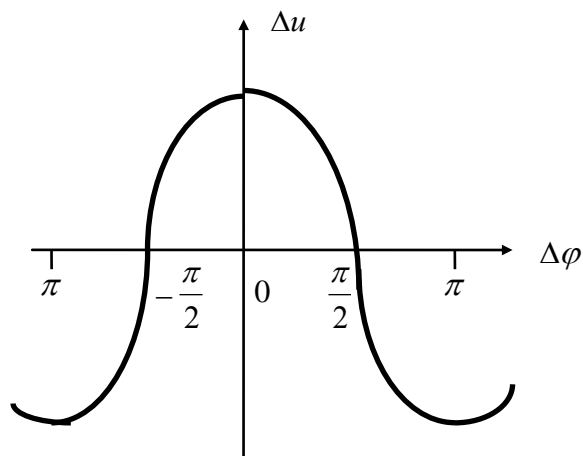


Рис.3.9

Таким образом, полоса удержания $\Delta\omega_y$ может быть найдена из выражения (3.29), если потребовать, чтобы установившаяся ошибка не превышала допустимой величины $\varepsilon_{\text{доп}}$:

$$\varepsilon_{\text{доп}} = \frac{\Delta\omega_y}{k}. \quad (3.30)$$

Решив (3.30) относительно $\Delta\omega_y$, получим выражение для определения полосы удержания:

$$\Delta\omega_y = k \cdot \varepsilon_{\text{доп}}. \quad (3.31)$$

Если $\varepsilon_{\text{доп}} = \pi / 2$ (рис.3.9), то

$$\Delta\omega_y = \pi / 2 \cdot k, \quad (3.32)$$

где k - общий коэффициент усиления кольца ФАПЧ.

Для определения полосы удержания $\Delta\omega_y$ находятся частоты ω_1 и ω_2 , при которых происходит срыв синхронизации. Тогда $\Delta\omega_y = \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 - \omega_1)$.

Полоса схватывания $\Delta\omega_{\text{сх}}$ находится путем определения частот ω_1 и ω_2 , при которых система ФАПЧ из режима биений (нет синхронизации) переходит в режим синхронизации.

Полоса схватывания меньше полосы удержания, и на ее величину влияет динамика процессов, происходящих при вхождении системы в синхронизм (перехода из режима биений в режим синхронизации).

Рассмотрена основная упрощенная система ФАПЧ, работающая в линейном режиме (рис.3.5). В практических схемах применения систем ФАПЧ могут быть различные варианты построения контура регулирования ФАПЧ.

Например, при применении системы ФАПЧ в синтезаторах частоты производится предварительное преобразование частоты генератора плавного диапазона (ГПД) (рис.3.10). В приведенной схеме генератор Γ_1 представляет собой источник высокостабильных колебаний. В кольце автоподстройки осуществляется синхронизация промежуточной частоты колебаниями опорного генератора Γ_2 .

Можно привести много примеров различных устройств техники связи, относящихся к импульсным системам автоматического управления. Например, импульсно-фазовая автоподстройка частоты (ИФАПЧ), импульсные следящие фильтры, импульсные системы АРУ, импульсные системы автоматической регулировки параметров (ИАРП) и др.

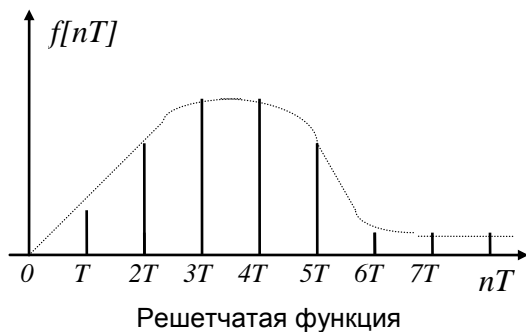
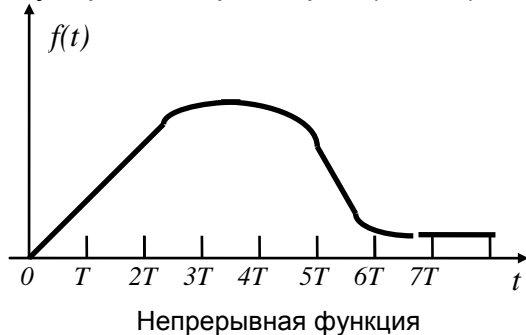


Рис.4.2

(рис.4.2). Решетчатую функцию обозначим символом $f[nT]$, где T - период дискретизации, а n - любое целое число.

Таким образом, по заданной функции $f(t)$ легко получить решетчатую функцию, полагая в ней $t = nT$. Например, функции $f(t) = e^{\alpha_1 t}$ соответствует решетчатая функция $f[nT] = e^{\alpha_1 nT}$. Часто оказывается удобным, чтобы расстояние между дискретными значениями независимой переменной было равно единице. Для этой цели в $f(t)$ производится замена независимой переменной $\bar{t} = t / T = n$. Решетчатая функция, соответствующая $f(\bar{t})$, равна $f[n]$. Так, например, после замены независимой переменной t в функции $f(t) = e^{\alpha_1 t}$ получаем

$$f(\bar{t}) = f[n] = e^{\alpha_1 T \bar{t}} = e^{\alpha_1 \bar{t}} = e^{\alpha n}.$$

Дискретное преобразование Лапласа является функциональным преобразованием решетчатых функций и определяется соотношением

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n], \quad (4.1)$$

где $q = pT = \sigma + jx$ - комплексное число, называемое параметром преобразования. Если сравнить (4.1) с определением обычного преобразования Лапласа

$$F(q) = \int_0^{\infty} e^{-qt} f(\bar{t}) dt, \quad (4.2)$$

то легко заметить аналогию между ними.

В основу методики анализа и синтеза импульсных и цифровых САУ положено дискретное преобразование Лапласа или Z-преобразование [5]. В результате применения указанных преобразований удалось создать методы исследования дискретных систем автоматического управления, аналогичные методам исследования непрерывных САУ.

Импульсная система реагирует на значение воздействия, приложенного ко входу импульсного элемента, только в равноотстоящие друг от друга дискретные моменты времени. Поэтому воздействие может быть заменено так называемой решетчатой функцией, т.е. функцией, значения которой определяются только при дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной; в паузах решетчатая функция равна нулю

Соотношение (4.1) устанавливает соответствие между решетчатой функцией $f[n]$ и функцией $F^*(q)$ комплексной переменной q . Первую функцию по аналогии с обычным преобразованием Лапласа назовем оригиналом, а вторую - изображением. Будем различать прямое дискретное преобразование Лапласа, когда по $f[n]$ определяется $F^*(q)$:

$$F^*(q) = D\{f[n]\}, \quad (4.3)$$

и обратное преобразование Лапласа, когда по изображению $F^*(q)$ находится решетчатая функция $f[n]$.

Если вместо переменной $q = pT$ ввести новую переменную посредством подстановки в (4.1) $e^q = z$, то преобразование принимает вид

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f[n]. \quad (4.4)$$

Соотношение (4.4) принято называть Z-преобразованием [6]. В специальной литературе имеются таблицы соответствий для перехода от решетчатых функций к их изображениям (D или Z-преобразованиям) и обратно.

Имеется также связь между изображением $F^*(q)$ решетчатой функции $f[n]$ и изображением $F(q)$ соответствующей непрерывной функции $f(t)$:

$$F^*(q) = \mathbf{D}\{F(q)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(q + jn\omega_0), \quad (4.5)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

4.2. Уравнения замкнутой импульсной САУ

Амплитудно-импульсный элемент представляет собой устройство, реагирующее на дискретные равноотстоящие друг от друга значения входного сигнала $x(t)$ при $t = nT$. Его выходная величина является последовательностью импульсов определенной формы, амплитуда которых пропорциональна дискретным значениям входной величины $x[nT]$ (рис.4.3).

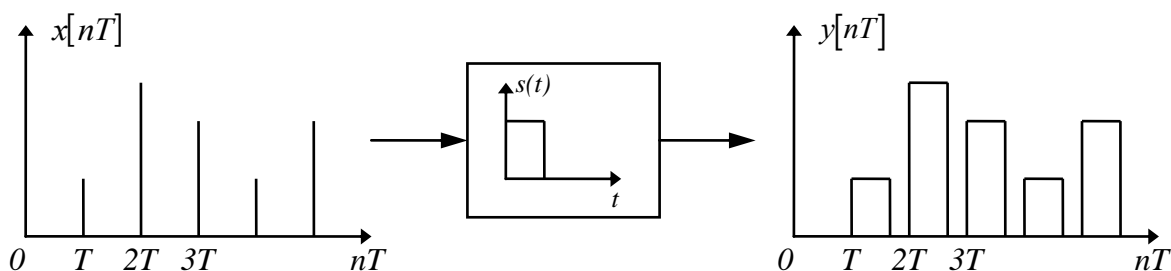


Рис.4.3

Импульсный элемент, на выходе которого образуется решетчатая функция, назовем простейшим импульсным элементом. Очевидно, что импульсный элемент с произвольной формой импульсов $s(t)$ может быть представлен в виде последовательного соединения простейшего импульсного элемента и формирующего устройства (экстраполятора), реакция которого на импульсные воздействия равна $s(t)$. Таким образом, импульсному элементу с произвольной

формой импульса эквивалентно последовательное соединение простейшего импульсного элемента с формирующим устройством (рис. 4.4).

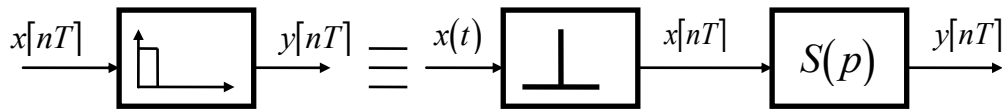


Рис.4.4

Так, для импульса прямоугольной формы

$$s(t) = \begin{cases} k_\phi, & 0 \leq t < T \\ 0, & T \leq t < \infty \end{cases} \quad S(p) = k_\phi \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

Замкнутую импульсную САУ после замены импульсного элемента соединением простейшего импульсного элемента и формирующего устройства можно представить в виде структурной схемы (рис. 4.5).

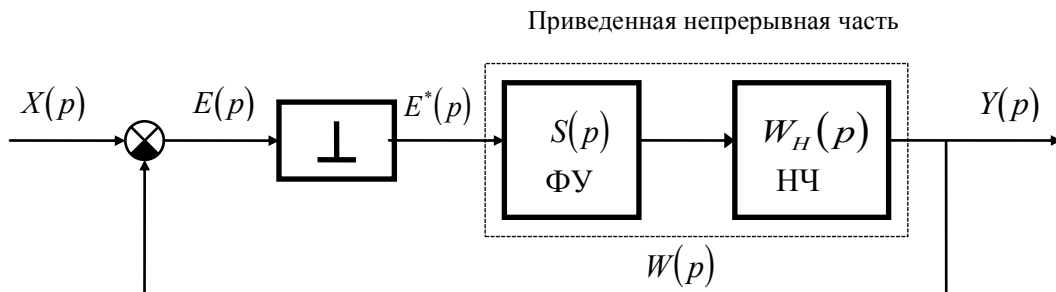


Рис.4.5

Таким образом, импульсная САУ содержит соединение простейшего импульсного элемента и приведенной непрерывной части, состоящей из формирующего устройства и непрерывной части.

Обозначим передаточную функцию приведенной непрерывной части через $W(p) = S(p) \cdot W_H(p)$. Тогда уравнение разомкнутой на входе импульсного элемента системы запишется в виде

$$Y(p) = S(p) \cdot W_H(p) \cdot E^*(p) = W(p) \cdot E^*(p).$$

Изображение уравнения замыкания имеет вид

$$E(p) = X(p) - Y(p) = X(p) - W(p) \cdot E^*(p). \quad (4.6)$$

Это уравнение содержит изображение $E(p)$ непрерывной величины $e(t)$ и $E^*(p)$ решетчатой функции $e[nT]$, поэтому его нельзя решить относительно одного из этих изображений.

Эту трудность можно обойти, если подвергнуть обе части (4.6) \mathcal{D} -преобразованию (4.5), определяющему по изображению непрерывной функции изображение соответствующей решетчатой функции.

В результате указанных преобразований находится уравнение замкнутой импульсной САУ

$$Y^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} X^*(p), \quad (4.7)$$

где $W^*(p) = \mathcal{D}\{W(p)\} = \mathcal{D}\{S(p) \cdot W_H(p)\}$.

Относительно сигнала ошибки уравнение замкнутой импульсной САУ имеет вид

$$E^*(p) = \frac{1}{1 + W^*(p)} X^*(p). \quad (4.8)$$

Возможен и другой путь получения уравнения замкнутой импульсной САУ.

В теории импульсных систем [3.17] для разомкнутых импульсных систем с импульсными элементами разной формы найдены передаточные функции.

Так, для разомкнутой системы с импульсным элементом с прямоугольными импульсами передаточные функции имеют вид:

$$W^*(q, \varepsilon) = c_{00} + \sum_{v=1}^l c_{v0} \cdot \frac{e^q - e^{q_v(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_v}} \cdot e^{q_v \varepsilon}; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \gamma; \quad (4.9)$$

$$W^*(q, \varepsilon) = \sum_{v=1}^l c_{v0} \cdot \frac{e^q \cdot (e^{q_v \gamma} - 1)}{e^q - e^{q_v}} \cdot e^{q_v(\varepsilon - \gamma)}; \quad \gamma \leq \varepsilon \leq 1; \quad (4.10)$$

$$c_{00} = \frac{P_H(0)}{Q_H(0)}; \quad c_{v0} = \frac{P_H(q_v)}{Q_H(q_v)q_v}, \quad (4.11)$$

где q_v - полюсы передаточной функции непрерывной части АИС

$$W(q) = \frac{P_H(q)}{Q_H(q)}; \quad (4.12)$$

$\gamma = \delta / T$ - относительная длительность прямоугольных импульсов (δ -абсолютная длительность импульсов, T - период дискретизации);

$\varepsilon = t / T$ при $0 \leq t \leq T$.

Выведем уравнение замкнутой импульсной САУ относительно изображений.

Уравнение разомкнутой САУ может быть записано в виде

$$Y^*(q, \varepsilon) = W^*(q, \varepsilon) \cdot E^*(q, 0). \quad (4.13)$$

Здесь $W^*(q, \varepsilon)$ - передаточная функция приведенной непрерывной части импульсной САУ.

Полагая $\varepsilon = 0$, получим уравнение разомкнутой АИС, определяющее изображение решетчатой функции $y[n, 0]$:

$$Y^*(q, 0) = W^*(q, 0) \cdot E^*(q, 0). \quad (4.14)$$

Решая уравнение (4.14) совместно с уравнением замыкания

$$E^*(q, 0) = X^*(q, 0) - Y^*(q, 0),$$

получаем уравнение замкнутой АИС относительно изображения сигнала ошибки

$$E^*(q, 0) = \frac{1}{1 + W^*(q, 0)} X^*(q, 0). \quad (4.15)$$

Подставляя в (4.13) значение $E^*(q, 0)$ из (4.15), получаем уравнение замкнутой АИС относительно выходной переменной, описывающее процессы в любой момент времени:

$$Y^*(q, \varepsilon) = \frac{W^*(q, \varepsilon)}{1 + W^*(q, 0)} X^*(q, 0). \quad (4.16)$$

Для АИС с прямоугольными импульсами $W^*(q, \varepsilon)$ имеет вид (4.9), (4.10).

Анализ дискретных САУ, как и непрерывных, включает в себя исследование устойчивости и качества процесса регулирования.

Для исследования устойчивости воспользуемся аналогом критерия Найквиста. Известно, что критерий Найквиста базируется на использовании частотной характеристики, поэтому сначала покажем, как получается частотная характеристика разомкнутой импульсной системы.

Частотная характеристика АИС получается из ее передаточной функции заменой q на $j\bar{\omega}$, где $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$ - относительная частота. Так, для систем, в которых формирующий элемент создает прямоугольные импульсы, согласно (4.9)

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = c_{00} + \sum_{v=1}^l c_{v0} \cdot \frac{e^{j\bar{\omega}} - e^{q_v(1-\gamma)}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{q_v}} \cdot e^{q_v \varepsilon}; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \gamma. \quad (4.17)$$

Критерий Найквиста для замкнутой АИС формулируется следующим образом: для того чтобы замкнутая АИС, непрерывная часть которой устойчива, была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф частотной характеристики $W^*(j\bar{\omega}, 0)$ при возрастании $\bar{\omega}$ от 0 до π не охватывал точку $(-1, j0)$.

Исследование качества замкнутых дискретных САУ типа АИС, как и для непрерывных САУ, сводится к определению установившейся и динамической ошибок при типовом возмущении (скачкообразном изменении входной величины), а также к исследованию переходной характеристики замкнутой АИС.

При возмущающем воздействии вида единичного скачка изображение (по дискретному преобразованию Лапласа) имеет вид

$$W^*(q, 0) = \frac{e^q}{e^q - 1}. \quad (4.18)$$

Используя уравнение (4.16), находим изображение выходной переменной АИС при скачкообразном воздействии, а затем, определив оригинал, получаем выходную переменную (переходную характеристику).

4.3. Исследование импульсных САУ методом цифрового моделирования

Как показано в п.2.6, цифровая модель непрерывной замкнутой САУ состоит из разностного уравнения замыкания и рекурсивного разностного уравнения «вход-выход» контура управления. В амплитудно-импульсной САУ в контуре управления содержится импульсный элемент, на выходе которого образуются импульсы той или иной формы (рис.4.3), амплитуда которых изменяется в соответствии с изменением сигнала ошибки. При цифровом моделировании амплитудно-импульсной САУ работу импульсного элемента можно имитировать путем включения в контур управления вместо реального импульсного элемента умножителя с переменным коэффициентом умножения. Так, при моделировании импульсной системы с прямоугольными импульсами коэффициент умножения на каждом счетном периоде дискретизации на протяжении длительности импульса ИЭ берется равным постоянному числу (единице, если коэффициент усиления импульсного элемента равен единице). В паузе между импульсами ($\gamma \leq \varepsilon \leq 1$) коэффициент усиления берется равным нулю. При какой либо другой форме импульсов коэффициент умножения на временном интервале действия импульсов должен меняться в соответствии с формой импульсов. Количество счетных периодов дискретизации, приходящихся на длительность импульсов, должно быть достаточным.

Структурная схема цифровой амплитудно-импульсной САУ (рис.4.6.) содержит разностное уравнение замыкания, имитатор импульсного элемента (умножитель) и разностное рекурсивное уравнение непрерывной части САУ.

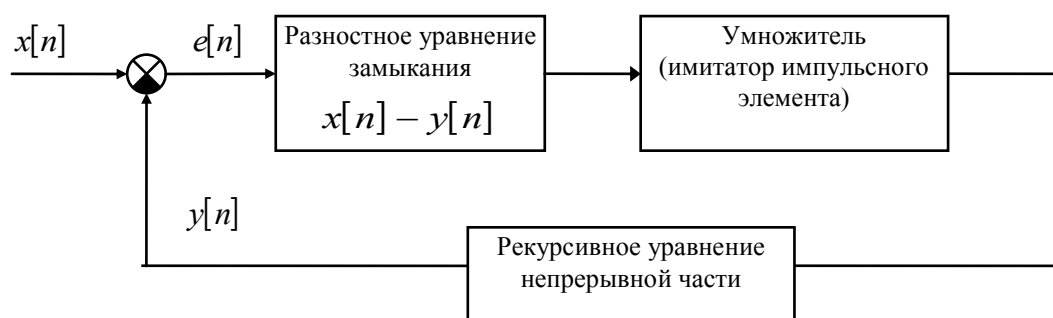


Рис.4.6

Аналогично можно исследовать широтно-импульсные САУ, в которых импульсный элемент вырабатывает импульсы, ширина которых изменяется в соответствии с изменением сигнала ошибки.

Такие импульсные САУ именуются широтно-импульсными системами (ШИС). Аналитически ШИС исследовать значительно сложнее, чем АИС. Исследовать ШИС методом цифрового моделирования не представляет сложности. Цифровая модель замкнутой ШИС состоит из уравнения замыкания, рекурсивного уравнения непрерывной части импульсной САУ и импульсного элемента, вырабатывающего импульсы, ширина которых изменяется по закону сигнала ошибки.

Импульсный элемент в ШИС моделируется умножителем с постоянным коэффициентом усиления (умножения) во время действия импульса и с коэффициентом умножения равным нулю во время паузы. Так как в ШИС информация о сигнале ошибки передается за счет изменения ширины импульсов (широтная модуляция), то необходимо, чтобы на ширину импульсного элемента приходилось достаточное количество счетных периодов.

Имея цифровые модели замкнутых импульсных САУ, можно исследовать устойчивость этих САУ, используя метод D-разбиения. В плоскости параметров строится граница D-разбиения и находятся области устойчивости и неустойчивости (п.2.8).

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ

5.1. Основные уравнения нелинейной САУ

Линейные САУ, как правило, являются идеализированными моделями реальных автоматических систем. Реальные САУ содержат всякого рода нелинейности как присущие системе, так и преднамеренно вводимые в целях улучшения динамических свойств САУ. Все эти нелинейности можно подразделить на несущественные, которыми при определенных условиях можно пренебречь, и существенные, пренебрежение которыми невозможно без искажений свойств системы. Следует помнить, что при наличии нелинейности принцип суперпозиции несправедлив, а поэтому ограничено применение основного математического аппарата теории линейных систем - преобразований Лапласа и Фурье. Тем не менее, в теории нелинейных САУ используют основные понятия и методы теории линейных систем и линеаризацию нелинейных элементов.

Структурная схема нелинейной САУ с одним нелинейным элементом изображена на рис.5.1.

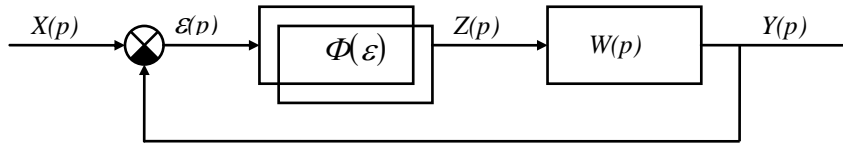


Рис.5.1

Уравнение нелинейного элемента (5.1)

$$z(t) = \Phi(\varepsilon(t))$$

или относительно изображений

$$Z(p) = L\{\Phi(\varepsilon(t))\} = \int_0^{\infty} \Phi(\varepsilon(t)) e^{-pt} dt. \quad (5.2)$$

Уравнение линейной части САУ относительно изображений

$$Y(p) = Z(p) \cdot W(p), \quad (5.3)$$

где $W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ - передаточная функция линейной части.

Уравнение замыкания САУ

$$\varepsilon(p) = X(p) - Y(p). \quad (5.4)$$

Заменяя в (5.3) $Z(p)$ его значением (5.2) и учитывая условие замыкания (5.4), получаем уравнение нелинейной САУ в изображениях относительно выходной величины

$$Y(p) = W(p) \cdot L\{\Phi(x(t) - y(t))\}, \quad (5.5)$$

или относительно ошибки

$$\varepsilon(p) = X(p) - W(p) \cdot L\{\Phi(\varepsilon(t))\}. \quad (5.6)$$

Уравнения (5.5), (5.6) - нелинейные, так как в них осуществляется нелинейное преобразование Φ над функциями $x(t) - y(t)$ и $\varepsilon(t)$.

К сожалению не существует общих методов решения нелинейных уравнений (5.5), (5.6). Поэтому наиболее эффективно исследовать нелинейные САУ можно, используя метод цифрового моделирования.

5.2. Исследование нелинейной САУ методом цифрового моделирования

Как показано в разд. 2, в основу метода цифрового моделирования положено рекурсивное уравнение (2.45), позволяющее рассчитать реакцию на выходе линейного звена произвольной структуры и сложности на входной сигнал произвольного вида:

$$y[nT] = \frac{1}{B_l} \left\{ \sum_{v=0}^l A_{l-v} \cdot x[nT - vT] - \sum_{v=1}^l B_{l-v} \cdot y[nT - vT] \right\}.$$

Так как входной сигнал $x[nT]$ - произвольного вида, то легко осуществить «сопряжение» различных звеньев, обладающих свойством направленности. Действительно, значения выходного сигнала $y[nT]$ (реакции линейного звена на сигнал $x[nT]$, который имеет произвольный вид) «принимаются» цифровой моделью (рекурсивным уравнением) следующего звена и т.д. Таким образом, при последовательном соединении звеньев, если известен сигнал на входе первого

звена, то, переходя от звена к звену с помощью рекурсивных уравнений вида (2.45), определяется реакция последовательного соединения звеньев на произвольный входной сигнал.

Если среди линейных звеньев имеется нелинейное звено, то реакция такого соединения звеньев также может быть определена.

Нелинейные звенья могут быть безынерционными и инерционными. Безынерционное нелинейное звено содержит лишь безынерционный нелинейный элемент, например, нелинейное сопротивление. Инерционное нелинейное звено наряду с безынерционным нелинейным элементом содержит инерционные линейные элементы (индуктивности емкости), соединенные тем или иным образом.

Наиболее простой задачей является расчет реакции последовательного соединения направленных инерционных линейных и безынерционных нелинейных звеньев (рис.5.2) на произвольный входной сигнал.

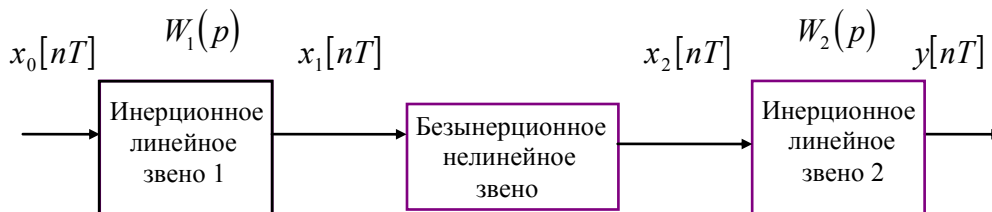


Рис.5.2

В соответствии с рис.5.2 сначала определяем реакцию $x_1[nT]$ на выходе первого инерционного звена с помощью рекурсивного уравнения (5.7)

$$x_1[nT] = \frac{1}{B_l} \left\{ \sum_{v=0}^l A_{l-v} \cdot x_0[nT - vT] - \sum_{v=1}^l B_{l-v} \cdot x_1[nT - vT] \right\}, \quad (5.7)$$

где A_i, B_i - коэффициенты, определяемые через коэффициенты a_i, b_i операторной передаточной функции $W_l(p)$ и матрицу перехода от L -преобразования к Z -преобразованию (2.47). Безынерционное нелинейное звено задается нелинейной характеристикой «вход-выход» $x_2 = f(x_1)$.

Имеются различные методы расчета формы сигнала на выходе безынерционного нелинейного звена. Наиболее наглядным является метод «4-квadrантной диаграммы», сущность которого пояснена на рис.5.3.

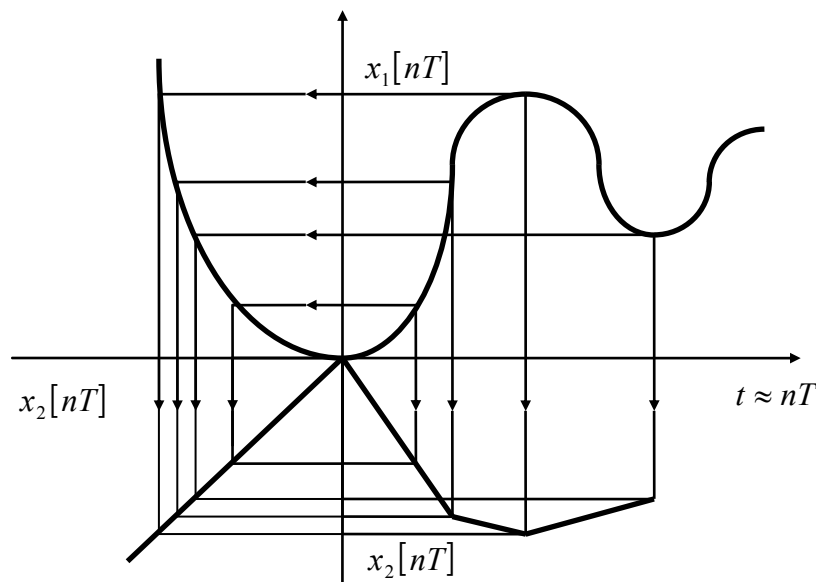


Рис.5.3

В первом квадранте расположена функция времени, воздействующая на нелинейное звено $x_1(t) \approx x_1[nT]$ (сигнал, поступающий с выхода инерционного линейного звена 1). Во втором квадранте изображена характеристика «вход-выход» нелинейного звена, а в третьем квадранте построена вспомогательная прямая, расположенная под углом 45° к осям координат. Сигнал на выходе нелинейного звена $x_2(t) \approx x_2[nT]$ находится графическим построением. Порядок нахождения отдельных точек искомой функции показан стрелками.

При расчете процесса на ЭВМ характеристика «вход-выход» нелинейного звена вводится в память машины в виде матрицы. Машинный алгоритм определения сигнала на выходе нелинейного звена составляется в соответствии с рассмотренным графическим методом (рис.5.3).

Найденный сигнал $x_2[nT]$ является входным сигналом для второго инерционного линейного звена. Определение реакции этой части системы производится по рекурсивному уравнению

$$y[nT] = \frac{1}{B_l} \left\{ \sum_{v=0}^l A_{l-v} \cdot x_2[nT - vT] - \sum_{v=1}^l B_{l-v} \cdot y[nT - vT] \right\}. \quad (5.8)$$

Рассмотренный метод позволяет рассчитывать реакцию в разомкнутой системе с произвольным количеством последовательно соединенных инерционных линейных звеньев.

В пособии рассмотрен случай расчета реакции на выходе разомкнутой системы последовательного соединения направленных линейных и нелинейных звеньев.

Для исследования динамических и статических процессов, происходящих в замкнутой САУ (рис.5.4), необходимо составить уравнения замыкания и «вход-выход» контура управления (точки 1-2 рис.5.4).

Уравнение замыкания

$$\varepsilon [nT] = x[nT] - y[nT]. \quad (5.9)$$

Уравнения «вход-выход» составляются при условии, что между точками 1-2 (рис.5.4) первое звено линейное инерционное, второе звено - нелинейное безынерционное и третье звено - линейное инерционное.

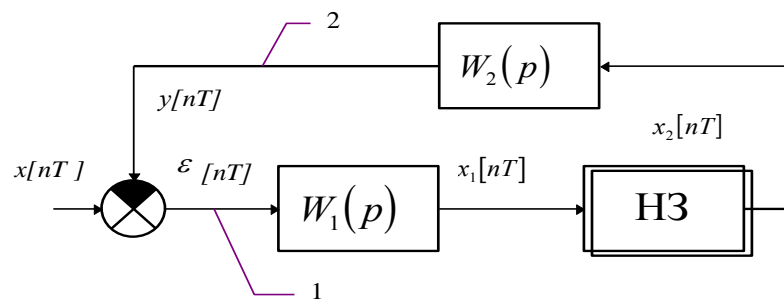


Рис.5.4

Реакция на выходе первого линейного инерционного звена определяется с помощью рекурсивного уравнения

$$x_1[nT] = \frac{1}{B_l} \left\{ \sum_{v=0}^l A_{l-v} \cdot \varepsilon [nT - vT] - \sum_{v=1}^l B_{l-v} \cdot x_1[nT - vT] \right\}. \quad (5.10)$$

Нелинейное безынерционное звено задано нелинейной характеристикой «вход-выход»

$$x_2 = f(x_1). \quad (5.11)$$

Значения сигнала $x_2[nT]$ на выходе нелинейного звена находятся либо по формуле (5.11), если нелинейная характеристика «вход-выход» задана формульно, либо с помощью матриц пересчета, если нелинейная характеристика звена задана графически.

Найденные значения сигнала $x_2[nT]$ на выходе нелинейного звена составляют входной сигнал для второго инерционного линейного звена с передаточной функцией $W_2(p)$, поэтому сигнал $y[nT]$ (в точке 2 рис.5.4) определяется по рекурсивному уравнению

$$y[nT] = \frac{1}{B_l^*} \left\{ \sum_{v=0}^l A_{l-v}^* \cdot x_2[nT - vT] - \sum_{v=1}^l B_{l-v}^* \cdot y[nT - vT] \right\}. \quad (5.12)$$

Рассмотренный алгоритм исследования процессов в замкнутой нелинейной САУ позволяет производить исследования нелинейной САУ при произвольном входном воздействии $x[nT]$ и анализировать динамические и статические характеристики в различных точках нелинейной САУ (на выходе - $y[nT]$, сигнал ошибки - $\varepsilon[nT]$, на выходе отдельных звеньев - $x_1[nT]$ и $x_2[nT]$).

В общем случае количество линейных инерционных и нелинейных безынерционных звеньев в контуре управления может быть произвольным. Этот вывод вытекает из рассмотренного алгоритма исследования нелинейной САУ.

Значительно сложнее исследовать нелинейную САУ, содержащую инерционные нелинейные звенья. Общий подход к исследованию такой же, как и в рассмотренном случае, но значительно усложняется определение реакции на выходе инерционного нелинейного звена при произвольном входном сигнале. С методом определения реакции на выходе инерционного нелинейного звена можно ознакомиться в [3,5].

6. МНОГОМЕРНЫЕ И МНОГОСВЯЗНЫЕ САУ

6.1. Основные определения

Объект управления принято называть многомерным, если число его управляемых параметров больше единицы. Система управления таким объектом называется многомерной. Изменение режима работы многомерного объекта осуществляется путем подачи соответствующих управляющих воздействий - входных сигналов. В большинстве случаев входные и выходные координаты взаимосвязаны, так что изменение лишь одной из входных величин приводит к возникновению процессов по всем выходным координатам.

При создании теории многомерных САУ преследовалась цель по возможности сохранить терминологию, принятую для более простого случая систем с одним входом и одним выходом. Одним из основных понятий теории одномерных систем управления является понятие звена.

Многомерным звеном называют математическую модель динамической системы, имеющей несколько входов и выходов [7]. Многомерная САУ представляет собой соединение различных многомерных звеньев.

Компактное изложение теории многомерных систем возможно лишь при применении аппарата матричного исчисления. В этом случае, если отвлечься от матричных обозначений, основные соотношения теории управления по форме совпадают с результатами, соответствующими одномерному случаю.

Если сделать допущение о том, что все многомерные звенья имеют одинаковое число входов и выходов, равное n , т.е. рассматриваются n -мерные системы, то одномерная система является частным случаем многомерной, когда $n=1$. Все входные и все выходные сигналы многомерных звеньев образуют n -мерные векторы, которые отождествляются с матрицей-столбцом размера $n \times 1$.

Динамические свойства непрерывного многомерного звена определяются матрицей передаточных функций, которую называют передаточной матрицей. Передаточная матрица позволяет связать вход и выход звена с помощью соотношения, по форме совпадающего с одномерным случаем.

Так, если $\mathbf{X}(p)$ - вектор изображений по Лапласу входных, $\mathbf{Y}(p)$ - выходных сигналов, а $\mathbf{W}(p)$ - передаточная матрица, то

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{W}(p) \cdot \mathbf{X}(p). \quad (6.1)$$

В случае дискретной системы связь дискретных значений входного и выходного сигналов устанавливается с помощью дискретной передаточной матрицы. Для исследования дискретных систем используется аппарат Z -преобразования. Связь между изображениями дискретных значений входных и выходных сигналов дается соотношением

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{W}(z) \cdot \mathbf{X}(z), \quad (6.2)$$

где $\mathbf{W}(z)$ - дискретная передаточная матрица.

Рассмотрим более подробно методы математического описания многомерных линейных систем.

Физические процессы в сложных многомерных системах описываются системой линейных дифференциальных уравнений n -го порядка. При таком описании многомерной системы необходимо решить систему линейных дифференциальных уравнений при ненулевых начальных условиях.

Такой подход к математическому описанию сложных линейных систем позволяет наиболее полно исследовать их характеристики. Сложность решения математической задачи при таком описании системы привела к появлению более формализованных методов описания линейных систем.

Один из них основан на рассмотрении характеристик системы «вход-выход» - передаточной функции для одномерной системы или передаточной матрицы для многомерной системы.

Другой подход связан с описанием поведения системы в абстрактном линейном пространстве состояния (фазовом пространстве).

Описание линейной системы по методу «вход-выход» с использованием передаточной функции подробно рассмотрено.

Поясним сущность описания системы в переменных состояния. Также покажем новые возможности снятия сложностей решения системы линейных дифференциальных уравнений высоких порядков с ненулевыми начальными условиями, что требует переоценки различных методов исследования одномерных и многомерных линейных систем.

6.2. Описание систем в переменных состояния

Под состоянием системы будем понимать совокупность величин, полностью определяющих ее положение в данный момент времени. Состояние системы играет роль начальных условий для всего будущего движения.

Будем определять состояние системы вектором \bar{X} с компонентами x_1, x_2, \dots, x_N . Множество этих векторов составляет пространство состояний, которое может рассматриваться как абстрактное линейное N -мерное пространство.

Динамические и статические свойства системы полностью определяются дифференциальными уравнениями

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 f(t), \quad (6.3)$$

где a_n, \dots, a_0 ; b_m, \dots, b_0 - коэффициенты, зависящие от параметров системы;

n - размерность системы.

Преобразуя дифференциальное уравнение (6.3) по Лапласу, запишем его в операторном виде

$$(a_n p^n + \dots + a_0) y(p) = (b_m p^m + \dots + b_0) f(p). \quad (6.4)$$

Описание системы в виде дифференциального уравнения n -го порядка (6.3), можно заменить описанием ее в виде системы из n -дифференциальных уравнений 1-го порядка. Подобный переход осуществляется не единственным способом, однако наиболее часто употребляется так называемое описание в виде фазовых переменных (в форме Коши).

Введем фазовые переменные x_i , определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \\ y^{(1)}(t) &= \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ y^{(2)}(t) &= \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$y^{(n)}(t) = \dot{x}_n(t) = -\frac{a_0}{a_n} x_1(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \frac{b_0}{a_n} f(t) + \dots + \frac{b_m}{a_n} f^{(m)}(t).$$

В матричном виде система уравнений (6.5) запишется более компактно

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (6.6)$$

где \mathbf{x} - вектор переменных состояний: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$;

\mathbf{u} - вектор управления: $\mathbf{u} = [f, f^{(1)}, \dots, f^{(m)}]^T$;

\mathbf{A} - матрица параметров размера $(n \times n)$;

\mathbf{B} - матрица управления размера $(n \times (m+1))$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_0}{a_n} & \dots & \dots & \frac{b_m}{a_n} \end{bmatrix}.$$

Переменные состояния, как правило, являются внутренними, не поддающимися измерению, ненаблюдаемыми величинами. Между тем в любой реальной системе имеется, по крайней мере, одна выходная переменная, поддающаяся измерению и контролю. В общем случае таких контролируемых выходных переменных может быть несколько.

Они составляют вектор измерений (наблюдений)

$$\bar{\mathbf{y}} = [y_1, y_2, \dots, y_k]^T.$$

В линейных системах этот вектор линейно связан с вектором состояния:

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}(t). \quad (6.7)$$

В случае фазовых переменных состояния (6.5) и одного (скалярного) выходного сигнала $\mathbf{H} = [1, 0, \dots, 0]$.

Итак, уравнение динамики линейной системы (6.4) можно привести к такому виду, в котором каждое из уравнений имеет первый порядок:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} , \\ \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} . \end{cases} \quad (6.8)$$

Эти уравнения являются уравнениями переменных состояния.

При описании сложной многоконтурной линейной системы в переменных состояниях систему разбивают на блоки, включающие простые (типовые) звенья, т.е. осуществляют декомпозицию системы. Описание композиционных блоков, на которые разбивается система при декомпозиции, определяется связью между входной и

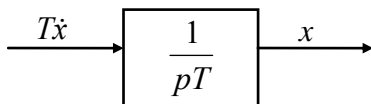


Рис.6.1

выходной переменными. Так, для интегрирующего звена (рис.6.1) сигнал на выходе обозначается через x , тогда на входе сигнал будет равен $T\dot{x}$, так как интегратор интегрирует свой входной сигнал $x = \frac{1}{T} \int T\dot{x} dt$.

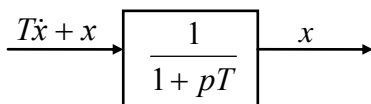


Рис.6.2

Для аperiodического звена связь между входом и выходом изображена на рис.6.2.

Более сложным представляется случай колебательного звена с передаточной функцией $W_k(p) = \frac{1}{1 + 2kTp + T^2 p^2}$.

Это звено можно представить в виде эквивалентной схемы (рис.6.3), содержащей два интегратора.

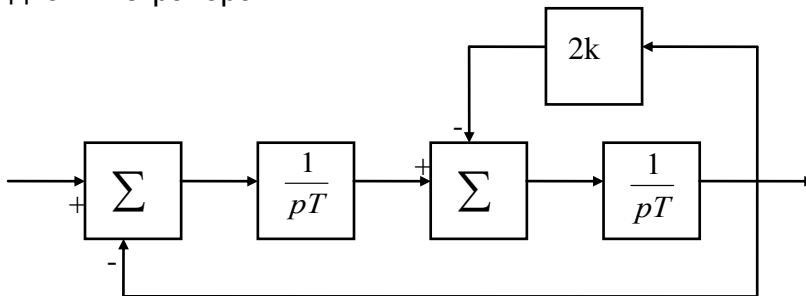


Рис.6.3

Поскольку это звено второго порядка, необходимо ввести две переменные x_1 и x_2 на выходе первого и второго интеграторов соответственно. При этом в реальном колебательном звене может не существовать физических сигналов, соответствующих переменным состояния x_1 и x_2 , ибо в общем случае переменные состояния могут не соответствовать реальным сигналам системы.

Если передаточная функция звена содержит ненулевую степень p в числителе, то необходимо разложить передаточную функцию на слагаемые, не содержащие полиномов степени p в числителе.

Например, для звена с передаточной функцией $\frac{pT_1}{1+pT_2}$ проводятся следующие преобразования:

$$\frac{pT_1}{1+pT_2} \cdot \frac{T_2}{T_2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{pT_2}{1+pT_2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{pT_2+1-1}{1+pT_2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+pT_2}\right).$$

В результате этих преобразований получим схему, изображенную на рис.6.4.

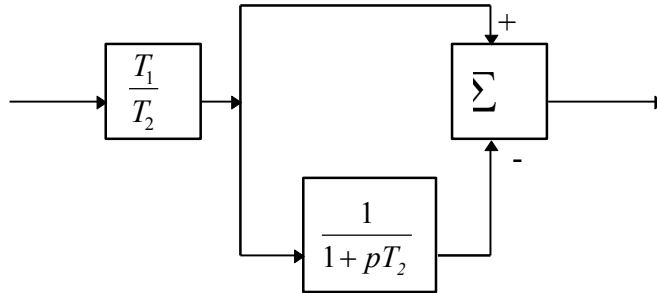


Рис.6.4

Пусть система имеет вид, показанный на рис.6.5, где введены переменные состояния x_1 и x_2 в соответствии с описанными выше правилами.

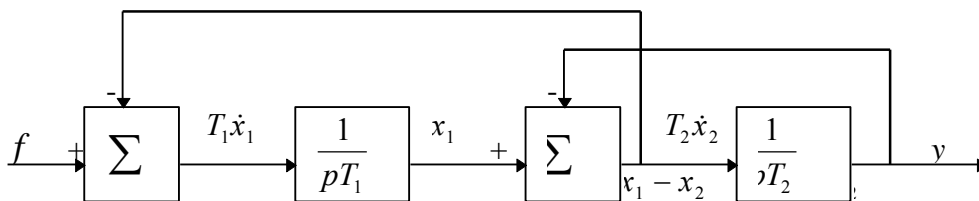


Рис.6.5

В этом случае имеет место система уравнений

$$\begin{cases} T_1 \dot{x}_1 = f - (x_1 - x_2), \\ T_2 \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ y = x_2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1} x_1 + \frac{1}{T_1} x_2 + \frac{1}{T_1} f, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} x_1 - \frac{1}{T_2} x_2, \\ y = x_2. \end{cases}$$

В векторно-матричной записи:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bf} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Hx}, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [0, \quad 1]$$

6.3. Описание многомерной линейной системы дифференциальными уравнениями и метод их решения

Система дифференциальных уравнений в операторной форме для многомерного динамического звена:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(p) \cdot Y_j(p) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(p) \cdot X_j(p), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.9)$$

где $Y_j(p)$ - изображения (преобразование по Лапласу) выходных переменных;

$X_j(p)$ - изображения входных переменных;

$a_{ij}(p)$, $\beta_{ij}(p)$ - параметры звена, например, операторные проводимости или сопротивления.

Или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} a_{11}(p) & \dots & a_{1k}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & \dots & a_{2k}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(p) & \dots & a_{nk}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \\ \dots \\ Y_n(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}(p) & \dots & \beta_{1k}(p) & \dots & \beta_{1n}(p) \\ \beta_{21}(p) & \dots & \beta_{2k}(p) & \dots & \beta_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1}(p) & \dots & \beta_{nk}(p) & \dots & \beta_{nn}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \dots \\ X_n(p) \end{bmatrix}.$$

Для упрощения также применяют более компактную запись системы уравнений в матричной форме.

$$\mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{Y}(p) = \mathbf{B}(p) \cdot \mathbf{X}(p).$$

Применяя методы теории определителей, находим решение системы уравнений

$$Y_k(p) = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

где Δ представляет собой определитель системы уравнений

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11}(p) & \dots & a_{1k}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & \dots & a_{2k}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(p) & \dots & a_{nk}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{bmatrix},$$

а Δ_k находится из определителя системы уравнений, если в нем столбец коэффициентов при определяемом неизвестном заменить свободными членами:

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_{11}(p) & \dots & \sum_{j=1}^n \beta_{1j}(p)X_j(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & \dots & \sum_{j=1}^n \beta_{2j}(p)X_j(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(p) & \dots & \sum_{j=1}^n \beta_{nj}(p)X_j(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{bmatrix}.$$

Если раскрыть определитель Δ_k по элементам k -го столбца, то

$$Y_k(p) = (-1)^{1+k} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \sum_{j=1}^n \beta_{1j}(p) \cdot X_j(p) + (-1)^{2+k} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \sum_{j=1}^n \beta_{2j}(p) \cdot X_j(p) + \dots + (-1)^{n+k} \frac{\Delta_{nk}}{\Delta} \sum_{j=1}^n \beta_{nj}(p) \cdot X_j(p), \quad (6.10)$$

где Δ_{ik} - минор определителя относительно i -й строки и k -го столбца;

$\frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \sum \beta_{ij}(p) \cdot X_j(p)$ - рациональные функции (алгебраические дроби) оператора p ,

все коэффициенты которых являются вещественными числами.

Поэтому формулу (6.10) после ряда преобразований можно привести к виду

$$Y_k(p) = (-1)^{1+k} \frac{a_{01} + a_{11}p + a_{21}p^2 + \dots + a_{m1}p^{m1}}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_l p^l} X_1(p) + \dots + (-1)^{s+k} \frac{a_{0s} + a_{1s}p + a_{2s}p^2 + \dots + a_{ms}p^{mk}}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_l p^l} X_{s1}(p) + \dots \quad (6.11)$$

Поделив числители и знаменатели на p^l , получаем другую форму записи

$$Y_k(p) = (-1)^{1+k} \frac{a_{m1}p^{m1-l} + a_{m-1,1}p^{m1-l-1} + \dots + a_{01}p^{-l}}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_l p^l} X_1(p) + \dots + (-1)^{s+k} \frac{a_{ms}p^{mk-l} + a_{m-1,s}p^{mk-l-1} + \dots + a_{0s}p^{-l}}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_l p^l} X_s(p) + \dots \quad (6.12)$$

Для определения оригинала перейдем от непрерывной системы к эквивалентной импульсной системе путем замены p^{-k} соответствующими соотношениями $F(Z^{-k})$ [4]. В результате такой замены приближенное выражение выходной переменной примет вид

$$Y_k(p) \approx (-1)^{1+k} \frac{A_{l1} + A_{l-1,1}Z^{-1} + \dots + A_{01}Z^{-l}}{B_l + B_{l-1}Z^{-1} + \dots + B_0Z^{-l}} X_1(p) + \dots + (-1)^{s+k} \frac{A_{ls} + A_{l-1,s}Z^{-1} + \dots + A_{0s}Z^{-l}}{B_l + B_{l-1}Z^{-1} + \dots + B_0Z^{-l}} X_s(p) + \dots \quad (6.13)$$

Или

$$Y_k(p) \cdot (B_l + B_{l-1}Z^{-1} + \dots + B_0Z^{-l}) \approx (-1)^{l+k} (A_{l1} + A_{l-1,1}Z^{-1} + \dots + A_{01}Z^{-l}) \cdot X_1(p) + \dots + (-1)^{s+k} (A_{ls} + A_{l-1,s}Z^{-1} + \dots + A_{0s1}Z^{-l}) \cdot X_s(p) \dots$$

В дальнейшем знак плюс или минус перед соответствующими полиномами (6.13), определяемый выражением $(-1)^{i+k}$, будет учитываться в соотношении для коэффициентов A_i

Умножению изображения на $Z^{-1} = e^{-pT}$ соответствует запаздывание оригинала на один период, поэтому по изображению $Y_k(p)$ можно найти оригинал:

$$\begin{aligned} B_l y_k[nT] + B_{l-1} y_k[nT - T] + \dots + B_0 y_k[nT - lT] \approx \\ A_{l1} x_1[nT] + A_{l-1,1} x_1[nT - T] + \dots + A_{01} x_1[nT - lT] + \\ \dots \\ A_{ls} x_s[nT] + A_{l-1,s} x_s[nT - T] + \dots + A_{0s} x_s[nT - lT] + \\ \dots \end{aligned}$$

Из полученного выражения определяем выходную переменную

$$y_k[nT] \approx \frac{1}{B_l} \left\{ \sum_{v=0}^l (A_{l-v,1} x_1[nT - vT] + \dots + A_{l-v,s} x_s[nT - vT] + \dots) - \sum_{v=1}^l B_{l-v} y_k[nT - vT] \right\}. \quad (6.14)$$

Рекуррентное соотношение (6.14) позволяет определить выходную переменную $y_k[nT]$ по предыдущим значениям выходной переменной $y_k[nT - vT]$ и значениям произвольных входных воздействий $x_i[nT]$, $x_i[nT - vT]$ в данный и предыдущие моменты времени.

Счет по рекуррентному соотношению (6.14) начинается с $n=0$, причем в счете должны участвовать лишь члены, у которых аргумент функций x_i и y_k положительный, то есть выполняется условие $nT - vT \geq 0$. Поэтому все члены рекуррентного соотношения будут участвовать в счете лишь при выполнении условия $n \geq l$.

Соотношение (6.14) можно использовать в качестве общего алгоритма для моделирования многомерного линейного звена и анализа процессов, протекающих в нем. Период дискретизации T выбирается из условия эквивалентности непрерывной и импульсной систем, т.е. должно выполняться условие теоремы Котельникова. Практически при расчете на ЭВМ период дискретизации выбирается методом проб. Берется достаточно малая величина T и производится расчет, затем расчет повторяется при $T_1 = T/2$. Если результаты первого и второго расчетов совпадут, то период дискретизации выбран правильно.

В рекурсивном уравнении (6.14) среди произвольных входных воздействий (сигналов) имеются как внешние входные воздействия, так и сигналы, соответствующие ненулевым начальным условиям исследуемой многомерной системы.

Правила определения коэффициентов рекурсивного уравнения (6.14) рассмотрены в настоящем пособии и в [4].

6.4. Многосвязные САУ

Многосвязные САУ являются разновидностью многомерных систем автоматического управления.

Как правило, многосвязная САУ (МСАУ) объединяет несколько односвязных (одномерных) САУ. Отдельная одномерная САУ носит название сепаратной САУ.

Итак, МСАУ представляет совокупность сепаратных САУ с перекрестными связями между ними.

Примером многосвязной САУ является система взаимной синхронизации генераторов (СВСГ).

На рис.6.6 приведена структурная схема СВСГ, состоящая из четырех фазовых автоподстроек частоты (ФАПЧ), связанных между собой по полносвязному графу (рис.6.7).

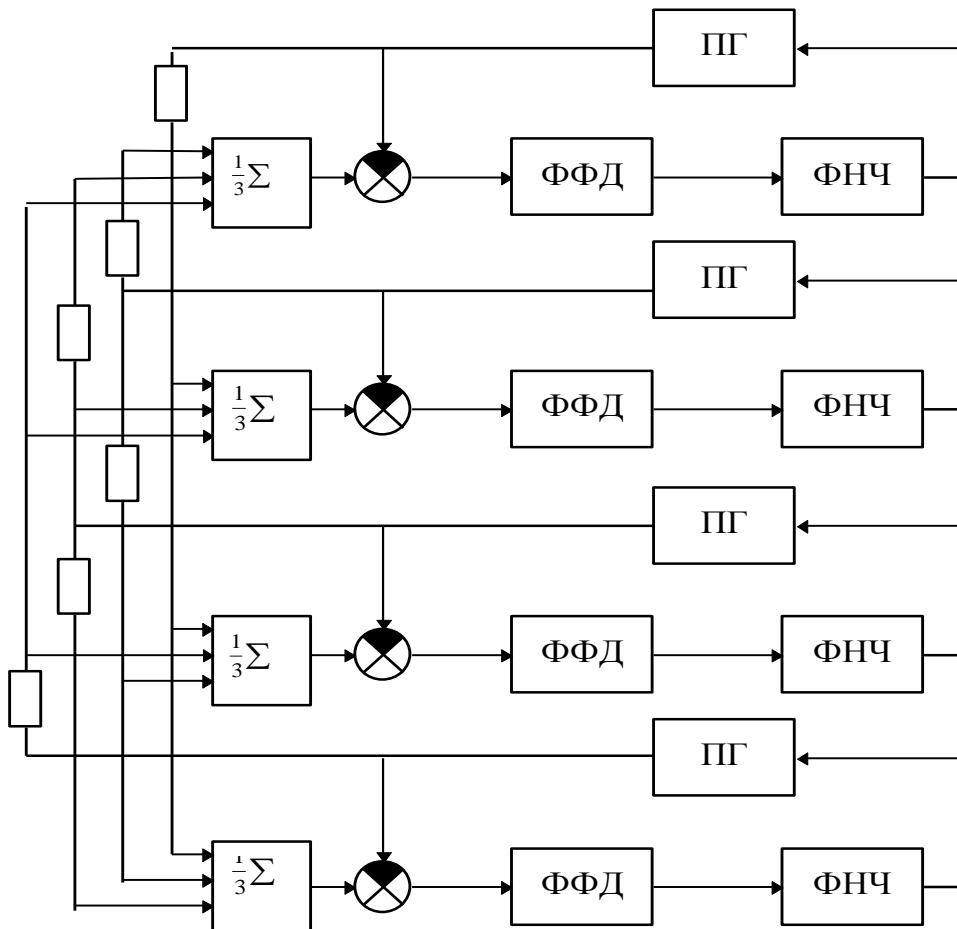


Рис.6.6

Предполагается, что в каждом узле графа находится ФАПЧ, поэтому при количестве узлов, равном четырем, на измеритель фазовых рассогласований каждой ФАПЧ поступают сигналы изменения фазы от трех ФАПЧ. Сепаратными САУ в приведенном примере являются фазовые автоподстройки частоты, а соединения между отдельными ФАПЧ образуют перекрестные связи.

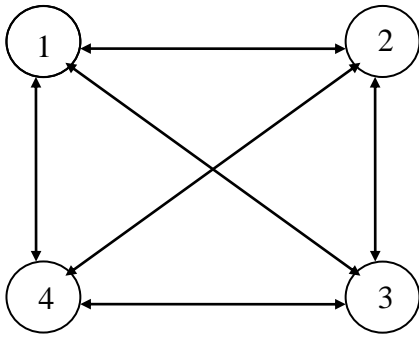


Рис.6.7

В общем случае в многосвязной САУ отдельные сепаратные САУ могут быть соединены между собой различным образом в соответствии с графом связности. Так, в рассмотренном примере фрагмента сети синхронизации отдельные ФАПЧ соединены по полностью связному графу, что соответствует СВСГ, но могут быть случаи, когда граф связности представляет собой кольцо, шину, звезду, решетку и др.

Многосвязные САУ могут быть исследованы методами исследования многомерных САУ с применением аппарата матричного исчисления.

Появление новых методов исследования, базирующихся на использовании компьютеров, расширило возможности анализа и синтеза многомерных и многосвязных САУ.

Весьма эффективно для этой цели может быть использован рассмотренный выше метод цифрового моделирования.

Действительно, не представляет труда составить цифровую модель сепаратной замкнутой САУ (2.52), (2.53).

Так как рекурсивные уравнения вида (2.45), положенные в основу цифрового моделирования, обладают свойством универсальности (сняты ограничения на вид входного сигнала и сложность моделируемого устройства), имеется возможность объединять отдельные цифровые модели, создавая модели сложных многомерных и многосвязных САУ.

Имея цифровую модель многосвязной САУ, не составляет труда исследовать устойчивость, динамические и статические характеристики МСАУ.

Для исследования устойчивости многосвязных САУ могут использоваться различные методы. Если в основу исследования МСАУ положен метод цифрового моделирования, то устойчивость целесообразно исследовать методом D-разбиения, путем построения областей устойчивости. Метод D-разбиения рассмотрен ранее (п. 2.8).

6.5. Управляемость и наблюдаемость одномерных и многомерных систем

Как показано выше, имеются различные методы описания динамических свойств линейной непрерывной системы. Один из них - способ описания с помощью дифференциальных уравнений (6.9) дает исчерпывающую информацию о характере поведения системы.

В инженерной практике получил распространение второй способ - задание системы ее характеристиками «вход-выход», которые по определению получены при нулевых начальных условиях и могут не отражать некоторых динамических особенностей системы. Передаточная функция (матрица) системы не является ее исчерпывающей характеристикой.

Дифференциальные уравнения полностью определяют статические и динамические свойства системы. Хотя передаточная функция (матрица) определяется дифференциальным уравнением, эта связь не является взаимно однозначной: одна и та же передаточная функция (матрица) может соответствовать различным дифференциальным уравнениям.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере. Одномерная система (рис.6.8), состоящая из последовательно включенных звеньев

$$W_1(p) = \frac{p+a}{(p+b)(p+c)} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{1}{p+a}$$

имеет передаточную функцию

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{p+a}{(p+a) \cdot (p+b) \cdot (p+c)}.$$

На первый взгляд может показаться, что общий множитель $p+a$ можно сократить без ущерба для описания системы.

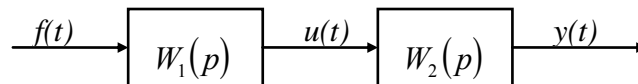


Рис.6.8

В действительности же сокращение такого рода можно производить лишь при рассмотрении вынужденной составляющей движения, вызванной входным сигналом $f(t)$ при нулевых начальных условиях.

Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что передаточная функция «вход-выход», описывающая поведение системы при нулевых начальных условиях, не является ее исчерпывающей характеристикой. Если система первоначально находилась в покое, то, подавая любые воздействия на вход системы, невозможно обнаружить в ней инерционное звено с передаточной функцией $\frac{1}{p+a}$.

При исследовании таких систем используют понятия управляемости и наблюдаемости, введенные и развитые Р.Е. Калманом [10]. Нетрудно показать, что схема рис.6.8 является не полностью управляемой.

Рассмотрение вопросов управляемости и наблюдаемости в системах управления проще всего производить, пользуясь описанием системы в терминах пространства состояний

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bf}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{Hx}. \end{cases} \quad (6.15-a)$$

Возможна смена базиса

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}, \quad |\mathbf{T}| \neq 0, \quad (6.15-b)$$

что приводит к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{f}, \\ \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}}, \end{cases} \quad (6.16)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{TB}, \\ \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{HT}. \end{cases} \quad (6.17)$$

Введение новых фазовых координат с помощью различных неособых преобразований (6.15-б) приводит к эквивалентным системам (6.16) различной структуры. При некотором базисе может оказаться, что матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ таковы,

что часть входных сигналов f_i не входит в некоторые дифференциальные уравнения (6.16), либо часть фазовых координат x_i не участвует в формировании выхода y . Появление неуправляемой и ненаблюдаемой частей системы связано со структурами матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{H} .

Приведем определения, позволяющие строго оценить управляемость и наблюдаемость исследуемой системы [7].

Определение 1. Система (6.15-а) называется полностью управляемой, если она не эквивалентна системе вида

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}^{11}\mathbf{x}^1 + \mathbf{A}^{12}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B}^1\mathbf{f}, \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}^{22}\mathbf{x}^2, \\ \mathbf{y} = \mathbf{H}^1\mathbf{x}^1 + \mathbf{H}^2\mathbf{x}^2, \end{cases} \quad (6.18)$$

где размерность вектора \mathbf{x}^1 равна ν_1 , а размерность \mathbf{x}^2 равна $\nu_2 = N - \nu_1$.

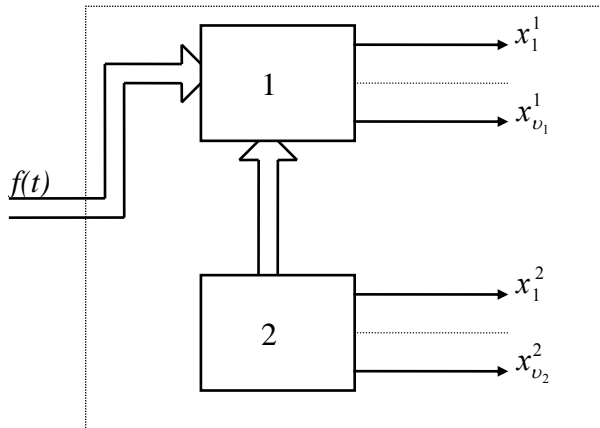


Рис.6.9

Другими словами, система является полностью управляемой, если нельзя указать такой базис, при котором уравнения (6.15-а) разбиваются на две группы, так что в уравнения второй группы не входят ни фазовые координаты первой группы, ни входные сигналы (рис.6.9).

Из уравнений (6.18) видно, что все координаты x_j^2 ($j=1,2,\dots,\nu_2$) неуправляемы, так как на них не оказывает действие вход системы f ни непосредственно, ни через остальные координаты x_i^1 ($i=1,2,\dots,\nu_1$).

Определение 2. Система (6.15-а) называется полностью наблюдаемой, если она не эквивалентна системе вида

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}^{11}\mathbf{x}^1 + \mathbf{B}^1\mathbf{f}, \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}^{21}\mathbf{x}^1 + \mathbf{A}^{22}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{f}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{H}^1\mathbf{x}^1, \end{cases} \quad (6.19)$$

где размерность вектора \mathbf{x}^1 равна ν_1^1 , а размерность \mathbf{x}^2 равна $\nu_2^1 = N - \nu_1^1$. Другими словами, полностью наблюдаемой является система, для которой нельзя указать такой базис, чтобы фазовые координаты разбились на две группы, причем координаты второй группы x_j^2 не входят ни в уравнения для координат первой группы x_i^1 , ни в алгебраические соотношения для выходных переменных y (рис.6.10).

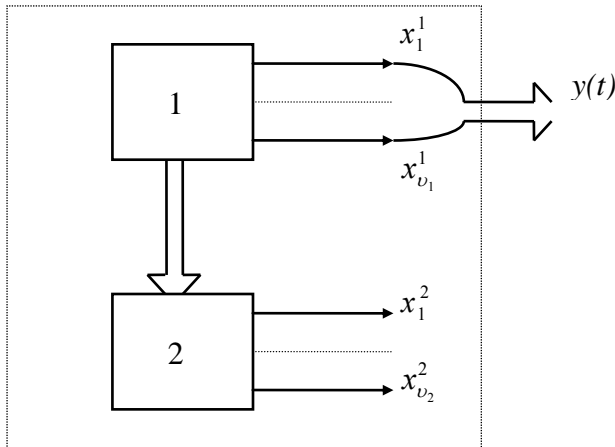


Рис.6.10

Из уравнений (6.19) видно, что координаты $x_j^2 (j = 1, 2, \dots, v_2)$ ненаблюдаемы, так как они не оказывают влияния на выход y ни непосредственно, ни через остальные координаты $x_i^1 (i = 1, 2, \dots, v_1)$.

Для решения вопроса о том, является система полностью управляемой и наблюдаемой или нет, воспользоваться непосредственно определениями, приведенными выше, затруднительно. Имеются критерии управляемости и наблюдаемости [7], позволяющие судить о свойствах системы без

перехода к другим базисам на основе исходной формы записи уравнений (6.15-а).

Критерий управляемости

Введем в рассмотрение матрицы $\mathbf{A}\mathbf{B}, (\mathbf{A})^2\mathbf{B}, \dots, (\mathbf{A})^{N-1}\mathbf{B}$ и составим из этих матриц и матрицы \mathbf{B} клеточную матрицу

$$\mathbf{U} = \left\| \mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, (\mathbf{A})^2\mathbf{B}, \dots, (\mathbf{A})^{N-1}\mathbf{B} \right\|_{N \times N}, \quad (6.20)$$

имеющую N строк и N столбцов.

Критерий управляемости формулируется следующим образом. Размерность v_1 управляемой части равна рангу матрицы \mathbf{U} [9].

Очевидно, что $v_1 \leq N$. Система является полностью управляемой, если дефект матрицы \mathbf{U} равен нулю ($v_1 = N$).

Критерий наблюдаемости

Пусть \mathbf{C}^1 и \mathbf{A}^1 - транспонированные матрицы для матриц \mathbf{C} и \mathbf{A} .

Размерность $v_1^1 \leq N$ наблюдаемой части системы (6.15-а) равна рангу матрицы

$$\mathbf{V} = \left\| \mathbf{C}^1, \mathbf{A}^1\mathbf{C}^1, (\mathbf{A}^1)^2\mathbf{C}^1, \dots, (\mathbf{A}^1)^{N-1}\mathbf{C}^1 \right\|_{N \times N} \quad (6.21)$$

Система является полностью наблюдаемой, если дефект матрицы \mathbf{V} равен нулю ($v_1^1 = N$) [10].

В общем случае система может одновременно содержать четыре части, исчерпывающие все возможные комбинации:

- управляемую, но ненаблюдаемую часть (часть I);
- полностью управляемую и наблюдаемую часть (часть II);
- неуправляемую и ненаблюдаемую часть (часть III);
- неуправляемую, часть (часть IV).

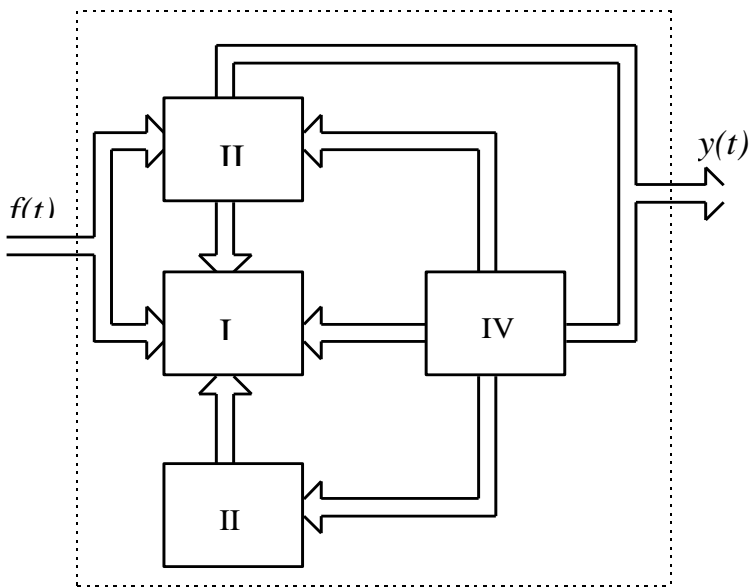


Рис.6.11

неуправляема и ненаблюдаема.

Структура рассматриваемой системы управления графически может быть изображена в виде 4-х блоков, связи между которыми изображены на рис.6.11.

Части I и II системы являются управляемыми, так как на них воздействует входной сигнал $f(t)$. Части II и IV - наблюдаемы - они определяют значение выходного сигнала y . Полностью управляемой и наблюдаемой частью является часть II. Часть III -

6.6. Понятие о задаче идентификации системы по передаточной матрице

Ранее рассматривались задачи определения характеристики «вход-выход» по известным дифференциальным уравнениям. Было показано, что передаточная функция (матрица) может не отражать всех свойств системы.

Правомочна обратная задача - определение дифференциальных уравнений системы по известной передаточной функции (матрице). Эту задачу называют задачей идентификации системы по ее передаточной функции (матрице), или просто задачей идентификации. Термин «идентификация» принято связывать с более широким кругом вопросов, возникающим при построении математической модели системы по данным, полученным в результате эксперимента.

Как было показано, передаточная функция (матрица) системы не позволяет полностью восстановить дифференциальные уравнения исходной динамической системы. Знание передаточной матрицы определяет только одну, а именно, полностью управляемую и наблюдаемую часть системы (часть II). Очевидно, что существует бесконечное множество динамических систем, имеющих одну и ту же передаточную матрицу. По существу задачи требуется найти систему, имеющую при заданной передаточной матрице наименьший порядок дифференциальных уравнений. Отказ от этого условия приводит к появлению в системе произвольных неуправляемых и ненаблюдаемых частей. Все сказанное означает, что ставится задача определения по передаточной матрице части II системы уравнений в некотором базисе, т.е. нахождения коэффициентов системы:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{H}^2 \mathbf{x}^2. \end{cases} \quad (6.22)$$

6.7. Условие инвариантности САУ

Автоматические системы называются инвариантными, если их ошибка тождественно равна нулю при любых задающих и возмущающих воздействиях.

Для определения условия инвариантности необходимо иметь общее уравнение автоматической системы.

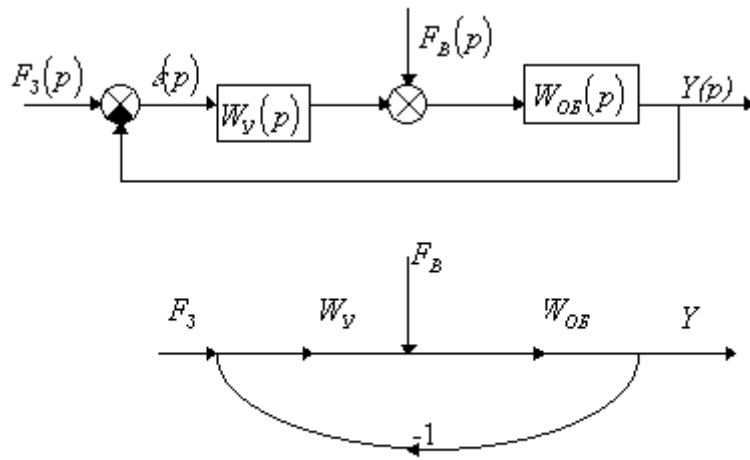


Рис.6.12

Структурная схема и граф обычной САУ изображены на рис.6.12, где $F_3(p)$ - изображение задающего воздействия, $F_B(p)$ - изображение возмущающего воздействия (помехи), $Y(p)$ - изображение выходной величины, $\varepsilon(p)$ - изображение ошибки. Управляемый объект характеризуется передаточной функцией $W_{об}(p)$, а управляющее устройство - передаточной функцией $W_v(p)$. Основное назначение САУ состоит в том, чтобы выходная величина $y(t)$ изменялась в соответствии с изменением задающего воздействия $f_3(t)$ и мало зависела от изменения возмущения $f_B(t)$.

Уравнение относительно $Y(p)$ состоит из двух частей. Каждая из этих частей представляет собой произведение соответствующей передаточной функции на свое воздействие. В рассматриваемом случае

$$Y(p) = K_3(p) \cdot F_3(p) + K_B(p) \cdot F_B(p), \quad (6.23)$$

где $K_3(p)$ и $K_B(p)$ - передаточные функции по задающему и возмущающему воздействиям, соответственно:

$$K_3(p) = \frac{W_v(p) \cdot W_{об}(p)}{1 + W_v(p) \cdot W_{об}(p)} \quad (6.24)$$

$$K_B(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_v(p) \cdot W_{об}(p)} \quad (6.25)$$

Поскольку изображение ошибки $\varepsilon(p)$ равно

$$\varepsilon(p) = F_3(p) - Y(p), \quad (6.26)$$

то, подставляя $Y(p)$ из (6.23) в (6.26), получаем уравнение относительно изображения ошибки

$$\varepsilon(p) = (1 - K_3(p))F_3(p) - K_B(p)F_B(p). \quad (6.27)$$

Передаточная функция ошибки по задающему воздействию

$$1 - K_3(p) = \frac{1}{1 + W_y(p) \cdot W_{об}(p)}, \quad (6.28)$$

а передаточная функция ошибки по возмущению отличается лишь знаком от $K_B(p)$.

Степень влияния изображений задающего и возмущающего воздействий на $Y(p)$ или $\varepsilon(p)$ определяется соответствующими передаточными функциями.

Для уменьшения влияния возмущающего воздействия на выходную величину и ошибку следует уменьшать передаточную функцию $K_B(p)$. Говоря об уменьшении передаточной функции, будем подразумевать уменьшение ее модуля. Для того чтобы выходная величина лучше воспроизводила задающее воздействие (чтобы ошибка была близка к нулю), следует $K_3(p)$ приближать к единице. Поскольку управляемый объект задан, то его передаточную функцию $W_{об}(p)$ невозможно изменять по своему усмотрению. Можно изменять лишь параметры элементов управляющего устройства, т.е. коэффициенты передаточной функции $W_y(p)$.

При увеличении $W_y(p)$, как следует из (6.24) и (6.25), передаточная функция $K_B(p)$ будет уменьшаться, стремясь к 0, $K_3(p)$ будет возрастать, стремясь к 1. Следовательно, в пределе при бесконечно большом коэффициенте усиления управляющего устройства

$$1 - K_3(p) \equiv 0, \quad K_B(p) \equiv 0. \quad (6.29)$$

При выполнении этих условий из (6.23) и (6.27) получаем

$$\begin{aligned} Y(p) &= F_3(p), \\ \varepsilon(p) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Итак, при неограниченном увеличении усиления управляющего устройства, расположенного в прямой части системы, между точками приложения задающего и возмущающего воздействия, ошибка системы стремится к нулю. Это значит, что выходная величина системы перестает зависеть от возмущающего воздействия и начинает точно воспроизводить задающее воздействие.

Из вышеизложенного следует, что условием инвариантности САУ является тождественное равенство нулю передаточных функций ошибки по задающему и возмущающему воздействиям. Если в САУ выполняется какое-либо одно из этих условий, то систему можно назвать частично инвариантной.

Инвариантные и частично инвариантные САУ представляют собой идеальные системы.

Эти системы, как правило, физически нереализуемы. Они определяют тот предел, к которому следует приближаться при желании синтезировать высококачественные системы с учетом реальных возможностей и ограничений.

6.8. Автономность многомерных систем

Под автономностью многомерной системы понимают представление многомерной системы в виде совокупности независимых одномерных систем. Такое представление в значительной мере обусловлено тем, что на автономные системы без особого труда переносятся все методы проектирования, разработанные для простого одномерного случая. Идея проектирования любой многомерной системы как совокупности независимых одномерных была высказана впервые Л.Н.Вознесенским [11].

Очевидно, что автономность системы управления не может рассматриваться как самоцель. Развитие средств моделирования и цифровой техники делает также шатким обоснование такого подхода соображением простоты расчета автономных систем. При проектировании систем управления необходимо иметь в виду главную цель - обеспечение высокой точности. С этих позиций проблема выявления класса систем, в которых целесообразно выполнять условия автономности, становится корректно поставленной математической задачей [7].

Математически условие автономности формулируется следующим образом. Многомерная САУ является автономной, если вынужденная составляющая k -й компоненты $y_k(jT)$ вектора выходного сигнала $y(jT)$ зависит только от одного k -го входного воздействия $f_k(jT)$ и не зависит от остальных составляющих вектора $f(jT)$. Это свойство должно быть выполнено для всех k .

7. ОПТИМИЗАЦИЯ САУ

7.1. Постановка задачи на оптимизацию

Выбор структуры и параметров САУ определяет ее динамические свойства. Устойчивость системы является, как правило, необходимым, но далеко недостаточным условием для того, чтобы система выполняла свое назначение. Возникает задача обеспечения не только устойчивости, но и надлежащего качества САУ и, более того, наилучшего (оптимального) в том или ином смысле, режима функционирования. Такая задача может быть названа задачей оптимизации.

Постановка задачи на оптимизацию и ее решение включает в себя ряд этапов:

- выбор и обоснование цели оптимизации;
- согласование цели с имеющимися возможностями, т.е. учет ограничений;
- реализация способа достижения цели (экспериментального значения критерия качества) при учете ограничений.

Выбор и обоснование цели оптимизации предусматривают определение критериев качества (целевых функций), которые наиболее полно отражали бы цели оптимизации. Этот этап является одним из основных, так как от правильности выбора критерия качества зависит решение задачи в целом.

Второй этап решения задачи связан с определением ограничений, которые должны учитываться в процессе оптимизации. Смысл этого этапа заключается в том, что часто качество системы характеризуется не одним, а группой показателей качества, поэтому если система оптимизируется по одному показателю качества, то другие могут достичь такой величины. Следовательно, если выбран какой-либо параметр системы как критерий качества, то на другие показатели качества и варьируемые параметры накладываются ограничения.

При реализации третьего этапа применяется тот или иной метод оптимизации, обеспечивающий решение поставленной задачи - достижение экстремального значения критерия качества при учете ограничений.

Для более полного представления об оптимизационных задачах остановимся подробнее на характеристиках объекта оптимизации и совокупности данных, необходимых для оптимизации объекта.

Объекты оптимизации можно классифицировать по ряду признаков. К таким признакам относятся:

- число оптимизируемых параметров объекта;
- число экстремумов характеристики объекта, используемой как показатель качества;
- объем априорной информации об объекте;
- способ математического описания объекта.

По числу варьируемых параметров различают одно- и многопараметрические объекты. В зависимости от количества экстремумов объекты делятся на одноэкстремальные и многоэкстремальные, причем в последнем случае оптимизационная задача сводится к отысканию глобального экстремума, т.е. минимального минимума и максимального максимума.

В зависимости от объема априорной информации могут быть экстремальные объекты, для которых существует математическое описание, и зависимость показателя качества Q от оптимизируемых параметров X известна. Для таких объектов имеется достаточный объем априорной информации. Существует также большой класс объектов, для которых нет никакого математического описания. Малый объем априорной информации о подобных объектах послужил поводом называть их объектами типа «черный ящик».

При общей формулировке задачи на оптимизацию вводится понятие совокупность данных $D = \{ D_1 \dots D_l \}$, необходимых для оптимизации объекта (системы). Совокупность данных включает совокупности:

- * условий $Y = \{ Y_1 \dots Y_r \}$;
- * оптимизируемых параметров $X = \{ X_1 \dots X_n \}$;
- * показателей качества $Q = \{ Q_1 \dots Q_m \}$;
- * ограничений $O = \{ O_1 \dots O_q \}$.

В совокупность условий входят характеристики полезных сигналов и помех E , воздействующих на объект.

Совокупность оптимизируемых параметров образует вектор параметров объекта оптимизации и характеризует вид оптимизационной задачи. Если число оптимизируемых параметров больше единицы ($n > 1$), то задача относится к многопараметрическим, а при $n = 1$ она переходит в однопараметрическую.

Совокупность показателей качества образует вектор показателей качества объекта $Q = \{ Q_1 \dots Q_m \}$.

При необходимости характеризовать объект группой показателей качества задача классифицируется как многокритериальная или векторная, если же для оптимизации выбран лишь один показатель качества, то задача переходит в однокритериальную или скалярную.

Совокупность ограничений играет весьма важную роль при постановке и решении оптимизационной задачи. Наиболее часто встречаются ограничения вида равенства ($x_i = x_{i0}$) или неравенства ($x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}$). Ограничения накладываются на варьируемые параметры, а также на показатели качества. Если в задаче векторной оптимизации перевести часть показателей качества в разряд ограничений, то можно ее свести к однокритериальной (скалярной) задаче.

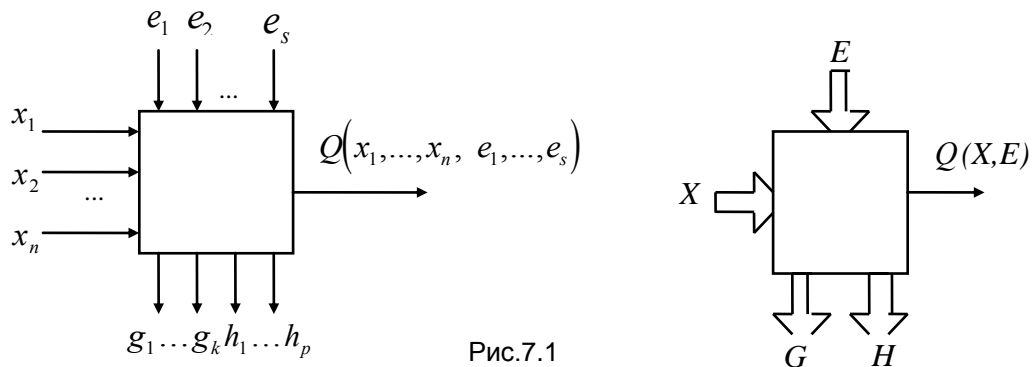


Рис.7.1

В общем случае объект многопараметрической оптимизации можно представить в виде многомерной системы (рис.7.1) с n управляемыми входами $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, характеризующими варьируемые параметры, при помощи которых производится оптимизация системы. Объект находится также под воздействием совокупности условий (полезных и мешающих сигналов) $E = \{ e_1, e_2, \dots, e_s \}$. Векторы X и E приложены к объекту.

Информация о работе объекта снимается с его выходов. Один из них представляет собой скалярный $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n, e_1, e_2, \dots, e_s) = Q(X, E)$ или векторный $Q = \{ Q_1, Q_2, \dots, Q_m \}$ показатель качества. Скалярный показатель качества используется при скалярной оптимизации, а векторный - при многокритериальной (векторной) оптимизации.

Кроме того, объект имеет $k+p$ выходов, соответствующих совокупности ограничений $O = \{ O_1, \dots, O_q \}$ вида равенств $G = \{ g_1, \dots, g_k \}$ и неравенств $H = \{ h_1, \dots, h_p \}$.

При выборе функции качества следует руководствоваться следующими требованиями. Функция качества должна

- отражать наиболее важные особенности объекта, определяющие его целевое назначение;
- иметь экстремум в допустимой области.

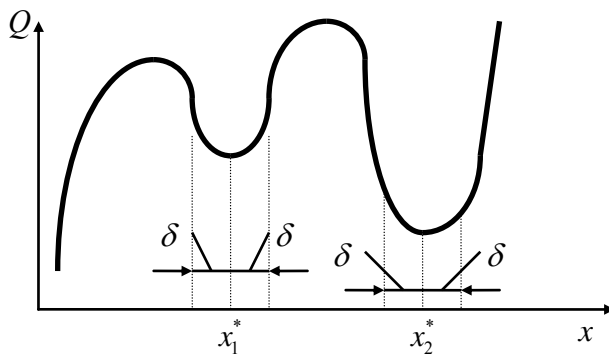


Рис.7.2

Следует различать локальный и глобальный экстремумы. Так, для объекта с одним варьируемым параметром ($n=1$) функция качества представляет собой функцию одной переменной (рис.7.2), которая может иметь несколько локальных экстремумов, но лишь один из них является глобальным (x_2^* на рис.7.2). В общем случае глобальный минимум (максимум) определяется как наименьший (наибольший) из N локальных:

$$Q(x^{**}) = \min Q(x_i^*), \quad i = \overline{1, N}. \quad (7.1)$$

Для 2-параметрических объектов функция качества представляется поверхностью сложной формы, а для многопараметрических объектов - гиперповерхностью.

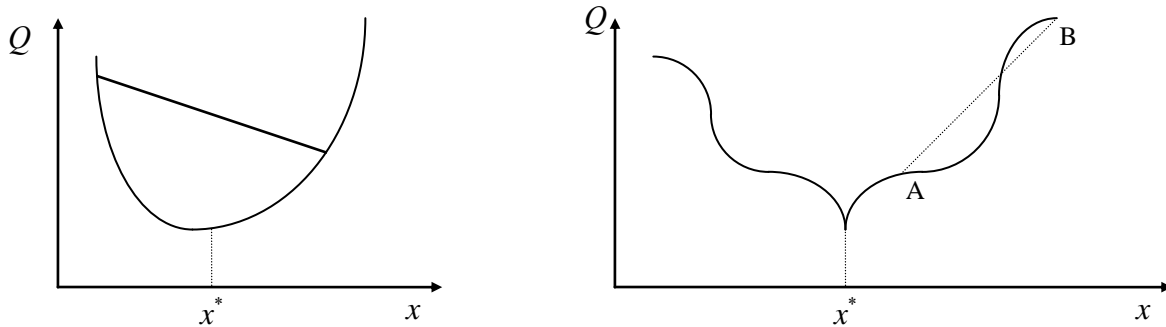


Рис.7.3

Весьма существенным является сведение об одноэкстремальности функции качества. Условию одноэкстремальности отвечают выпуклые функции. Так, выпуклая функция одной переменной обладает следующим свойством: любая секущая пересекает выпуклую функцию не более чем в двух точках (рис.7.3). Пример выпуклой функции 2-х переменных приведен на рис. 7.4.

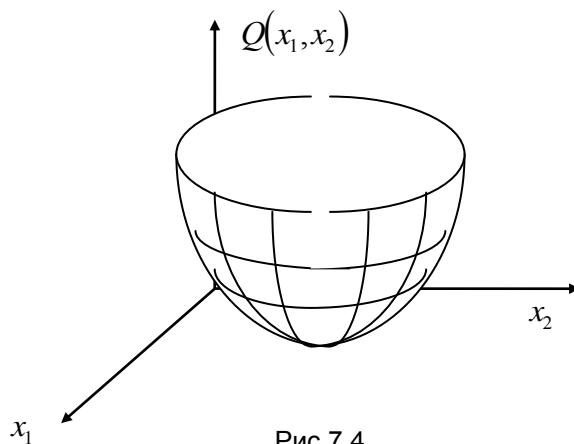


Рис.7.4

Завершающими этапами решения оптимизационной задачи являются выбор метода оптимизации и сама оптимизация, т.е. нахождение оптимальных варьируемых параметров (входных переменных), при которых функция качества достигает минимума или максимума.

Выбор метода оптимизации зависит, в основном, от вида функции качества, которая в свою очередь определяется особенностями объекта

оптимизации: его сложностью, структурой, математическим описанием объекта, наличием априорных данных об объекте.

Наиболее полно разработаны методы оптимизации, получившие название «методы математического программирования». К ним относятся методы линейного, геометрического, выпуклого, нелинейного, стохастического программирования.

Для применения того или иного метода необходимо, чтобы функция качества отвечала определенным требованиям: ее аналитическое выражение должно быть определенного вида.

Например, для применения метода линейного программирования функция качества:

$$Q(\vec{x}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n. \quad (7.2)$$

Следует иметь в виду, что структура выражения функции качества целиком зависит от особенностей математического описания объекта оптимизации, так как функция качества находится из математического описания объекта.

Как ранее указывалось, описание объекта может быть представлено либо в виде аналитических соотношений, либо в виде алгоритмов. Последняя форма

описания практикуется при описании сложных объектов, когда целесообразно применение методов машинного моделирования. Поэтому не всегда удается получить функцию качества в форме явной аналитической зависимости $Q = Q(\bar{x})$.

Все это затрудняет во многих случаях применение хорошо разработанных методов математического программирования.

Для решения многопараметрических оптимизационных задач при алгоритмическом методе описания объектов могут быть использованы поисковые методы оптимизации.

Поясняя сущность оптимизационных задач, нельзя не остановиться на особенностях задачи оптимального управления.

В задачах оптимального управления для достижения экстремального значения функции качества изменяется управляющее воздействие (управление) и параметры системы. В общем виде задача оптимального управления может быть сформулирована следующим образом: следует минимизировать функцию качества

$$Q(\bar{x}, \bar{u}) \rightarrow \min ,$$

где \bar{x} - вектор параметров системы,

\bar{u} - вектор управления,

при выполнении совокупности ограничений вида равенств и неравенств, накладываемых на управляющее воздействие, параметры и показатели качества.

Задачу оптимального управления можно рассматривать как наиболее общую оптимизационную задачу, из которой вытекают различные частные задачи. Действительно, при постановке задачи оптимального управления берется полная совокупность данных.

Отличительной особенностью этой задачи является включение в совокупность условий вектора управления \bar{u} (управляющих воздействий), обеспечивающего экстремизацию функции качества. Таким образом совокупность условий в общем случае состоит из совокупностей воздействий: постоянных, случайных (помех) и управляющих. Вектор управления \bar{u} , как и вектор параметров \bar{x} , являются варьируемыми переменными.

Теория оптимального управления, в основном, создавалась при решении задач автоматического управления. Но это не значит, что любая система автоматического управления работает по законам оптимального управления. Системы автоматического управления могут быть оптимальными в определенном смысле (в соответствии с выбранным показателем качества), а могут быть неоптимальными.

Но в системах автоматического управления наиболее полно реализуются принципы оптимального управления, т.е. достижение экстремального значения функции качества за счет изменения управляющих воздействий (вектора управления) и параметров САУ. Характерно также, что задачи оптимального управления всецело зависят от особенностей объекта. Если объект управления и среда, в которой он функционирует, не меняют своих свойств, то задача сводится к однократному достижению экстремальной цели, т.е. к задаче оптимизации. Возможен другой случай, когда свойства объекта управления изменяются во времени, вследствие чего необходимо организовать процесс слежения за экстремальной целью. Такого рода задача является общей задачей оптимального управления.

7.2. Методы поисковой оптимизации

Как ранее было указано, выбор метода оптимизации определяется математическим описанием критерия качества (целевой функции) $Q(\bar{x})$.

Если критерий качества связан с объектом оптимизации алгоритмически, например, с помощью рекурсивных уравнений, то наиболее целесообразно использовать поисковые методы оптимизации: метод случайного поиска и метод регулярного поиска (метод градиента).

Метод случайного поиска

Рассмотрим метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге.

При априорно заданных значениях варьируемых параметров находится величина критерия качества $Q_0(\bar{x})$. Далее производится обращение к генератору случайных чисел (ГСЧ), распределенных по нормальному закону, которые в виде приращений добавляются к варьируемым параметрам. В результате получаются новые параметры

$$x_{1,1} = x_1 + \xi_1, \quad x_{2,1} = x_2 + \xi_2, \quad x_{3,1} = x_3 + \xi_3, \dots,$$

при которых рассчитывается новое значение критерия качества $Q_1(\bar{x})$. Если новое значение $Q_1(\bar{x})$ оказывается больше $Q_0(\bar{x})$, попытка считается неудачной, и новый шаг совершается из прежней точки. Попытка также считается неудачной и при невыполнении ограничений. Если же новое значение $Q_1(\bar{x})$ лучше или равно предыдущему значению, то попытка считается удачной, и следующий шаг делается из новой точки.

При поисковой оптимизации трудно определить момент, когда следует прекратить поиск. Чаще всего окончание поиска определяется опытным путем. В начале поиска новые (зачетные) значения функции качества $Q_i(\bar{x})$ появляются через малые временные интервалы, а в конце оптимизации улучшенные значения целевой функции находятся крайне редко. Это является признаком того, что стадия поиска близка к завершению, т. е. поиск производится в окрестности вблизи экстремального значения критерия качества. Поэтому, исходя из опыта, задаются максимальным временем появления новых зачетных значений функции качества. Если в течение этого времени новые значения $Q_i(\bar{x})$ не появляются, то поиск прекращается.

Метод регулярного поиска (метод градиента)

Процесс оптимизации по методу градиента разбивается на два этапа. На первом этапе производится определение составляющих градиента, т.е. частных

производных критерия качества по оптимизируемым параметрам: $\frac{\partial Q(\bar{x})}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$. Во

время второго этапа совершается рабочий шаг, т.е. производится смещение в направлении обратном градиенту. Для этого сначала определяются новые параметры

$$x_i^{(N+1)} = x_i^{(N)} - \alpha \frac{\partial Q(\bar{x})}{\partial x_i}, i = \overline{1, n},$$

где α - параметр длины рабочего шага.

Новое значение функции качества на данном шаге оптимизации находится после определения всех очередных новых значений варьируемых параметров и после проверки выполнения ограничений по каждому параметру.

При алгоритмическом описании критерия качества (с помощью рекурсивных уравнений) составляющие градиента (частные производные) можно определить приближенно:

$$\frac{\partial Q(\bar{x})}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta Q(\bar{x})}{\Delta x_i} = \frac{1}{\Delta x_i} [Q(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - Q(x_1, x_2, \dots, x_n)], \quad i = \overline{1, n}.$$

7.3. Пример оптимизации САУ

В качестве примера оптимизации САУ рассмотрим задачу, связанную с оптимизацией параметров фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

Как ранее было показано, ФАПЧ является классическим примером астатической САУ.

Основные требования, предъявляемые к ФАПЧ:

- обеспечение минимальной фазовой ошибки при изменении частоты синхроимпульсов;
- высокая помехоустойчивость.

В соответствии с рассмотренной последовательностью постановки и решения оптимизационной задачи в первую очередь выбирается критерий качества (целевая функция) $Q(\bar{x})$, затем формулируются ограничения.

Произведем оптимизацию параметров ФАПЧ в целях повышения ее помехоустойчивости.

При такой постановке задачи в качестве целевой функции выбираем дисперсию фазовых отклонений на выходе ФАПЧ, вызванных флуктуацией фазы синхроимпульсов на ее входе.

Итак, критерием качества выбрана дисперсия

$$Q(\bar{x}) = D_y(\bar{x}) \rightarrow \min. \quad (7.3)$$

Предполагается, что синхроимпульсы флуктуируют по фазе, причем фазовые отклонения синхроимпульсов подчиняются нормальному (гауссовскому) закону распределения. Также известна автокорреляционная функция случайных фазовых отклонений синхроимпульсов. В этом случае, как известно [4], на выходе линейной системы закон распределения фазовых отклонений тоже будет нормальный. При такой постановке задачи необходимо иметь соотношения, позволяющие рассчитать дисперсию фазовых отклонений генератора тактовой частоты ФАПЧ.

Далее необходимо связать критерий качества $Q(\bar{x}) = D_y(\bar{x})$ с объектом оптимизации - фазовой автоподстройкой частоты. Для этого необходимо обратиться к цифровой модели ФАПЧ (рис.7.5).

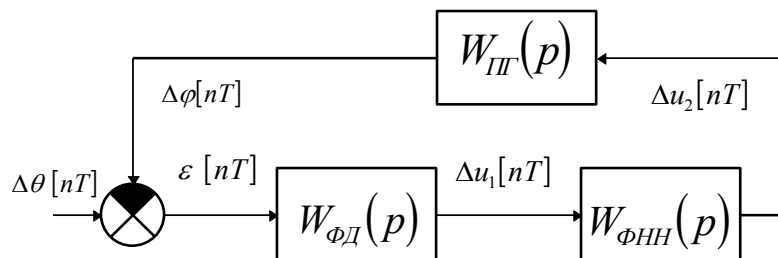


Рис.7.5

На основе структурной схемы (рис.7.5), цифровая модель ФАПЧ состоит из:

1) уравнения замыкания

$$\varepsilon [nT] = \Delta\theta [nT] - \Delta\varphi [nT], \quad (7.4)$$

где T - период дискретизации, $n=0,1,2\dots$

2) уравнения «вход-выход» контура управления

$$\Delta\varphi [nT] = f(\varepsilon [nT]). \quad (7.5)$$

Зависимость (7.5) находится с помощью трех рекурсивных уравнений:

* фильтра фазового дискриминатора, составленного на основе операторной передаточной функции $W_{\phi d}(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p}$:

$$\Delta u_1 [nT] = \frac{1}{B_1} \left\{ \sum_{\nu=0}^1 A_{1-\nu} \varepsilon [nT - \nu T] - B_0 \Delta u_1 [nT - T] \right\}; \quad (7.6)$$

* ФНЧ (пропорционально-интегрирующего фильтра 2-го порядка), имеющего операторную передаточную функцию 2-го порядка $W_{\phi HV}(p) = \frac{a_0^* + a_1^* p + a_2^* p^2}{b_0^* + b_1^* p + b_2^* p^2}$:

$$\Delta u_2 [nT] = \frac{1}{B_2^*} \left\{ \sum_{\nu=0}^2 A_{2-\nu}^* \Delta u_1 [nT - \nu T] - \sum_{\nu=1}^2 B_{2-\nu}^* \Delta u_2 [nT - \nu T] \right\}; \quad (7.7)$$

• подстраиваемого генератора (ПГ), имеющего передаточную функцию 1-го порядка $W_{III}(p) = \frac{a_0^v + a_1^v p}{b_0^v + b_1^v p}$:

$$\Delta\varphi [nT] = \frac{1}{B_1^v} \left\{ \sum_{\nu=0}^1 A_{1-\nu}^v \Delta u_2 [nT - \nu T] - B_0^v \Delta\varphi [nT - T] \right\}. \quad (7.8)$$

Чтобы найти связь между критерием качества (дисперсией $D_y(\bar{x})$) и объектом оптимизации, который представлен в виде цифровой модели, необходим алгоритм, позволяющий рассчитать дисперсию фазовых отклонений подстраиваемого генератора (ПГ) ФАПЧ, если на ее вход подаются синхроимпульсы, фазовые отклонения которых подчиняются нормальному закону распределения и автокорреляционная функция фазовых флуктуаций, например, имеет экспоненциальный вид.

При такой постановке задачи дисперсия [4]:

$$D_y = R_y[0] = \sum_{n=0}^N w [nT] \cdot g[nT], \quad (7.9)$$

где $w[nT]$ - весовая функция (импульсная характеристика) исследуемой линейной системы, т.е. реакция этой системы на δ - функцию;

$g[nT]$ - реакция исследуемой системы на воздействие, совпадающее с корреляционной функцией $R_x[nT]$ случайного сигнала (в нашем случае - случайных фазовых отклонений СИ).

Вычислительная схема (рис.7.6), построенная на основе формулы (7.9), имеет два параллельно работающих блока, с выхода которых выходные переменные поступают на блок перемножения, а затем - суммирования.

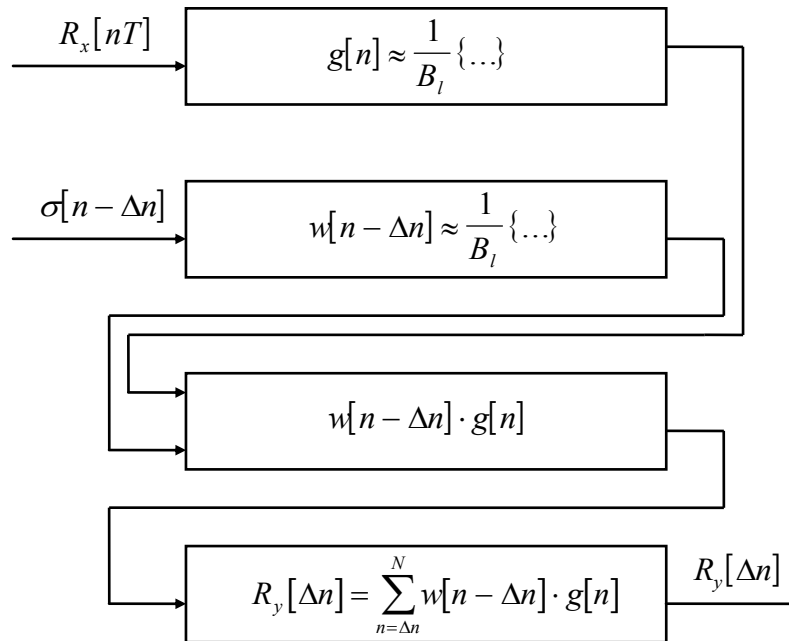


Рис.7.6

На вход первого блока поступает сигнал вида $R_x[nT]$, а сам блок представляет собой цифровую модель ФАПЧ. На вход второго блока подается единичная ступенчатая функция, а сам блок также представляет собой цифровую модель ФАПЧ. Реакцией второго блока в этом случае будет переходная характеристика ФАПЧ. Чтобы получить импульсную характеристику ФАПЧ, необходимо воспользоваться соотношением, связывающим переходную и импульсную характеристики

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt} \approx \frac{\Delta h[nT]}{\Delta t}, \quad (7.10)$$

где $h(t)$, $k(t)$ - переходная и импульсная характеристики, соответственно.

Далее в результате перемножения соответствующих величин после каждого шага и суммирования последовательности из N произведений, получаем значение дисперсии.

$N \rightarrow \infty$ выбирается из условия $k(\lambda) \approx 0$, при $\lambda \geq N$.

Итак, первый этап решения оптимизационной задачи, связанный с выбором целевой функции и обеспечением связи целевой функции с объектом оптимизации, выполнен.

Далее необходимо обосновать выбор варьируемых параметров. Так как оптимизационная задача решается в целях повышения помехоустойчивости ФАПЧ, то звеном, параметры которого необходимо менять при определении минимума целевой функции, является пропорционально-интегрирующий фильтр (рис.7.5). Параметры остальных звеньев ФАПЧ в данной задаче остаются постоянными.

Вторым этапом решения оптимизационной задачи является формулировка ограничений. В рассматриваемой задаче этот вопрос решается следующим образом. Изменение параметров пропорционально-интегрирующего фильтра приводит к изменению переходной характеристики ФАПЧ, т.е. к изменению качества ее работы. Поэтому в процессе оптимизации по критерию помехоустойчивости (минимизируется дисперсия) необходимо на каждом шаге оптимизации проверять

переходную характеристику $h[nT]$, например, проверять максимальное значение переходной характеристики (величину первого выброса)

$$h[nT]_{\text{МАКС}} \leq h_{\text{МАКС ДОП}}$$

и длительность фронта переходной характеристики

$$t_{\phi} \leq t_{\phi \text{ МАКС ДОП}} \cdot \quad (7.11)$$

В соответствии с вычислительной схемой (рис.7.6) при расчете дисперсии на вход второго блока подается единичная ступенчатая функция, находится переходная характеристика ФАПЧ и проверка ограничений не вызывает трудностей. Также формулируются ограничения на варьируемые параметры. Эти ограничения записываются в виде неравенств

$$x_{i \text{ min}} \leq x_i \leq x_{i \text{ max}} \cdot \quad (7.12)$$

Третьим этапом решения оптимизационной задачи является выбор метода оптимизации.

В рассмотренной постановке оптимизационной задачи в качестве методов оптимизации могут быть использованы: метод случайного поиска или метод градиента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов / Под ред. А. А. Воронова.-М.: Высш. шк.,1986.
2. Б е л е ц к и й А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей.-М.: Связь,1967.
3. Щ е л о в а н о в Л. Н. Моделирование элементов телевизионных систем.-М.: Радио и связь,1981.
4. Щ е л о в а н о в Л. Н., Р а с с к а з о в а Е. И. Моделирование систем передачи дискретных сообщений и документальной электросвязи (системы факсимильной связи) 2305, 2306. Учеб. пособие/ ЛЭИС.-Л.,1989.
5. Ц ы п к и н Я. З. Основы теории автоматических систем.-М.: Наука,1977.
6. Д е ч Г. Руководство к практическому применению Z-преобразования.-М.: Наука, 1971.
7. К а т к о в н и к Я.. К., П о л у э к т о в Р. А. Многомерные дискретные системы управления.- М.: Наука,1966.
8. К а л м а н Р. Е. Об общей теории систем управления // 1-й Международный конгресс ИФАК: Тр./ АН СССР.-М., 1961. - Т.2.
9. К а l m a n R. E. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems // SIAM Journ. Contr.- 1963.- Ser. A. №1.
10. К а l m a n R. E., Н о Y. G., N a r e n d r a K. S. Contrallability of Linear Dynamical Systems // Contr. To Differential Equations.- 1962. -№1.
11. В о з н е с е н с к и й Л. Н. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // Автоматика и телемеханика.-1938. - №4, 5.
12. Щ е л о в а н о в Л. Н. Принципы анализа и синтеза одномерных и многомерных систем автоматического управления / ВАС.- Л., 1976.

13. Морозовский В. Т. Многосвязные системы автоматического регулирования.-М.: Энергия,1970.
14. Гитис Э. И. и др. Техническая кибернетика.-М.: Сов.радио,1968.
15. Щелованов Л. Н. Принципы автоматического управления / ВАС.- Л.,1976.
16. Самойленко В. И., Пузырев В. А., Грубин И. В. Техническая кибернетика.-М: МАИ,1994.
17. Цыпкин Я.. 3. Теория линейных импульсных систем.- М.: Физматгиз,1963.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

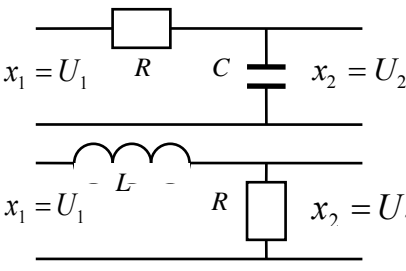
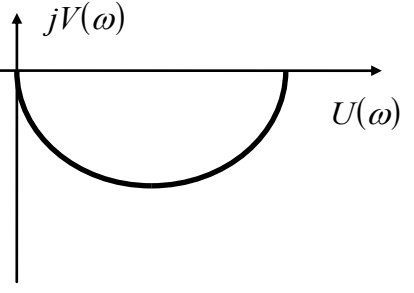
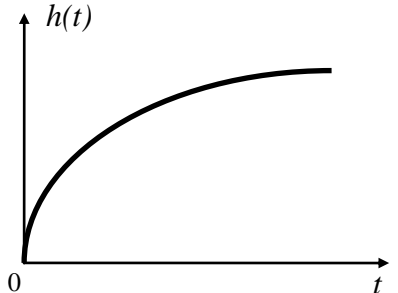
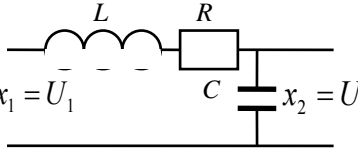
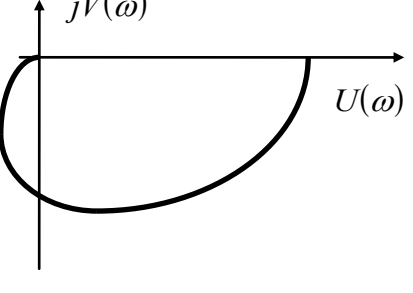
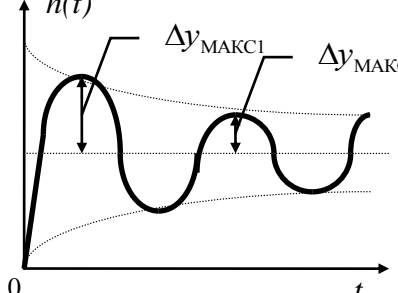
Соответствия между изображениями и оригиналами (L -преобразование)

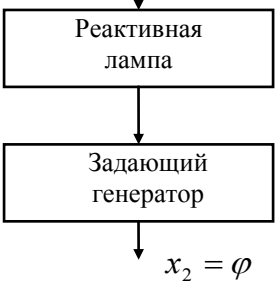
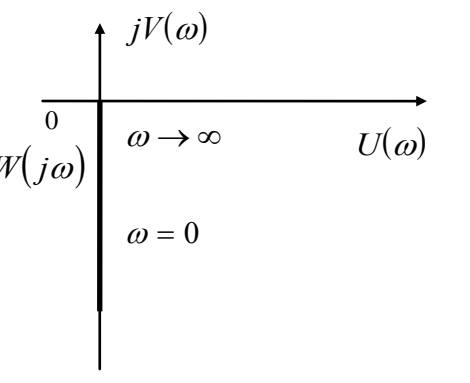
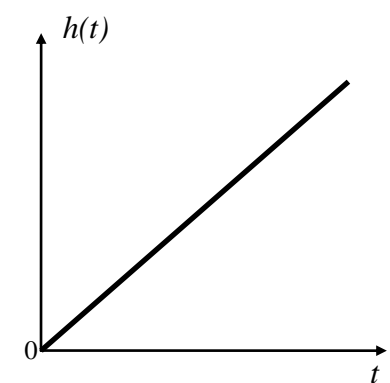
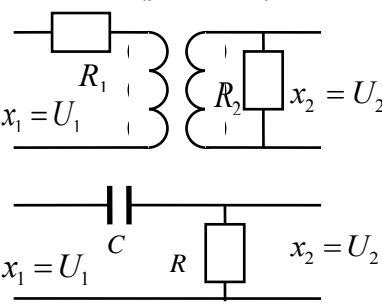
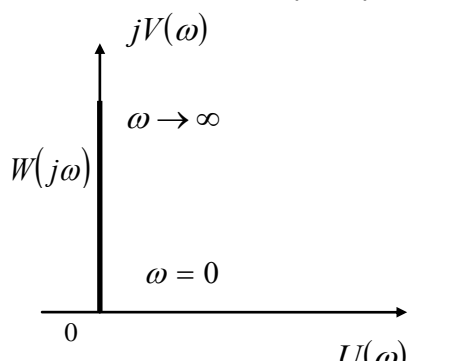
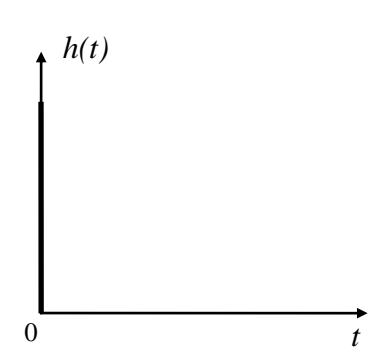
№ п/п	$L[x(t)] = X(p)$	$L^{-1}[X(p)] = x(t)$
1	A	$A\delta(t)$
2	$\frac{A}{p}$	A
3	$\frac{A}{p^2}$	At
4	$\frac{A}{p^n}$	$\frac{A}{(n-1)!} t^{n-1}$
5	$\frac{A}{p+\alpha}$	$Ae^{-\alpha t}$
6	$\frac{A}{(p+\alpha)^2}$	$Ate^{-\alpha t}$
7	$\frac{A}{(p+\alpha)^n}$	$\frac{A}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t}$
8	$\frac{A}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{A}{\omega} \sin \omega t$
9	$\frac{A}{p(p+\alpha)}$	$\frac{A}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$
10	$\frac{A}{p(p^2 + \alpha \cdot p + \beta)}$	$\frac{A}{\beta} - \frac{A}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{2\omega} \sin \omega t \right),$ где $\omega = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$
11	$\frac{A_1 p + A_2}{p^2 + \alpha \cdot p + \beta}$	$e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left(A_1 \cos \omega t + \frac{2A_2 - \alpha \cdot A_1}{2\omega} \sin \omega t \right),$ где $\omega = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$

12	$\frac{U(p)}{V(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0},$ $m < n$	$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{p_i t},$ <p>где $V'(p) = \frac{dV(p)}{dp},$</p> <p>$p_i$ – корни уравнения $V(p) = 0$</p>
13	$\frac{U(p)}{pV(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{p(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0)}$	$x(t) = \frac{U(0)}{V(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{U(p_i)}{p_i V'(p_i)} e^{p_i t},$ <p>где $V'(p) = \frac{dV(p)}{dp},$</p> <p>$p_i$ – корни уравнения $V(p) = 0$</p>

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Частотные и переходные характеристики типовых звеньев

Тип звена	Частотная амплитудно-фазовая характеристика	Переходная характеристика
<p>Апериодическое звено</p>  <p>$x_1 = U_1$ $x_2 = U_2$</p>		
<p>Колебательное звено</p>  <p>$x_1 = U_1$ $x_2 = U_2$</p>		

<p>Интегрирующее звено</p> <p>$x_1 = u$</p>  <p>$x_2 = \varphi$</p>		
<p>Дифференцирующее звено (реальное)</p> 	<p>Характеристика идеального звена</p>  	

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Матрицы перехода от L к Z -преобразованию

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{10}{3} & 0 & -2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{124}{45} & -4 & \frac{8}{3} & 2 & -4 \\ \frac{158}{5} & 0 & -6 & 0 & 6 \\ \frac{124}{45} & 4 & \frac{8}{3} & -2 & -4 \\ -\frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{45} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{25}{9} & 4 & -\frac{7}{3} & -3 & 5 \\ \frac{44}{3} & -\frac{70}{9} & -4 & \frac{26}{3} & 2 & -10 \\ \frac{44}{3} & \frac{70}{9} & -4 & -\frac{26}{3} & 2 & 10 \\ \frac{4}{3} & \frac{25}{9} & 4 & \frac{7}{3} & -3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_6 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{105} & 0 & -\frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{68}{105} & -\frac{4}{3} & \frac{126}{45} & -4 & 2 & 4 & -6 \\ \frac{1426}{105} & -\frac{40}{3} & 5 & 8 & -11 & -5 & 15 \\ \frac{3736}{105} & 0 & -\frac{140}{9} & 0 & \frac{52}{3} & 0 & -20 \\ \frac{1426}{105} & \frac{40}{3} & 5 & -8 & -11 & 5 & 15 \\ \frac{68}{105} & \frac{4}{3} & \frac{126}{45} & 4 & 2 & -4 & -6 \\ \frac{2}{105} & 0 & -\frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Соответствия между решетчатыми функциями и их изображениями
(Z-преобразование)

Оригинал $f[n], n \geq 0$	Изображение $Z\{f[n]\}$
$1[n] = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0 \\ 1 & \text{при } n \geq 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z}{(z-1)^3}(z+1)$
a^n	$\frac{z}{z-a}$

$e^{-\alpha n}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha}}$
$\frac{1 - e^{\alpha n}}{1 - e^{\alpha}}$	$\frac{z}{(z - e^{\alpha})(z - 1)}$
$\frac{1 - e^{\alpha(n-1)}}{1 - e^{\alpha}}$	$\frac{z^2}{(z - e^{\alpha})(z - 1)}$
$\sin \bar{\omega}_0 n$	$\frac{z \sin \bar{\omega}_0}{z^2 - 2z \cos \bar{\omega}_0 + 1}$
$\cos \bar{\omega}_0 n$	$\frac{z(z - \cos \bar{\omega}_0)}{z^2 - 2z \cos \bar{\omega}_0 + 1}$

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Основные понятия теории автоматического управления.....	3
2. Одномерные системы автоматического управления.....	6
2.1. Основные характеристики САУ.....	6
2.2. Типовые звенья САУ.....	8
2.3. Уравнение разомкнутой и замкнутой САУ.....	9
2.3.1. Передаточная функция замкнутой системы.....	12
2.4. Методы перехода от изображения к оригиналу.....	14
2.5. Метод цифрового моделирования.....	14
2.6. Цифровая модель замкнутой САУ.....	17
2.7. Анализ устойчивости линейных систем.....	18
2.8. Исследование устойчивости методом D-разбиения.....	19
2.9. Исследование качества процесса управления (регулирования).....	20
2.10. Понятие о методах коррекции САУ.....	22
2.11. Чувствительность САУ.....	27
3. Примеры статической и астатической САУ.....	28
3.1. Система автоматической подстройки частоты.....	28
3.2. Система фазовой автоподстройки частоты.....	31
4. Дискретные системы автоматического управления.....	37
4.1 Основные понятия.....	37
4.2 Уравнения замкнутой импульсной САУ.....	39
4.3 Исследование импульсных САУ методом цифрового моделирования....	42
5. Нелинейные САУ.....	43
5.1. Основные уравнения нелинейной САУ.....	43
5.2. Исследование нелинейной САУ методом цифрового моделирования.....	44
6. Многомерные и многосвязные САУ.....	47
6.1. Основные определения.....	47
6.2. Описание систем в переменных состояниях.....	48
6.3. Описание многомерной линейной системы дифференциальными уравнениями и метод их решения.....	52
6.4. Многосвязные САУ.....	55
6.5. Управляемость и наблюдаемость одномерных и многомерных систем....	56
6.6. Понятие о задаче идентификации системы по передаточной матрице....	60

6.7. Условие инвариантности САУ.....	60
6.8. Автономность многомерных систем.....	62
7. Оптимизация САУ.....	63
7.1. Постановка задачи на оптимизацию.....	63
7.2. Методы поисковой оптимизации.....	67
7.3. Пример оптимизации САУ.....	69
Литература.....	72
Приложение 1. Соответствия между изображениями и оригиналами (L -преобразование).....	73
Приложение 2. Частотные и переходные характеристики типовых звеньев...	74
Приложение 3. Матрицы перехода от L к Z -преобразованию.....	75
Приложение 4. Соответствия между решетчатыми функциями и их изображениями (Z -преобразование).....	76

